Entwurf anreizkompatibler Mechanismen

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2017

Mechanismen und Geld

- Menge A von möglichen Ergebnissen.
- Ziel: Wähle ein Ergebnis $a \in A$.
- Spieler haben quantifizierbare Präferenzen über die Ergebnisse. Gemeinsame Währung ermöglicht Nutzentransfer zwischen Spielern.
- Präferenz von Spieler i wird beschrieben durch eine Bewertungsfunktion $v_i : A \to \mathbb{R}$ aus einer bekannten Menge von Funktionen $V_i \subseteq \mathbb{R}^A$.
- v_i ist private Information von Spieler i.
- Mechanismus zur Wahl eines Ergebnisses:
  1. Frage die Bewertungen aller Spieler ab (direkte Offenlegung)
  2. Bestimme ein Ergebnis $a \in A$
  3. Bestimme Zahlungen m_i für jeden Spieler i
- Nutzen oder Utility von Spieler i ist $v_i(a) - m_i$. Nutzen ist quasi-linear.

Beispiel: Sealed-Bid Auktion

Ein einzelner Gegenstand wird an einen Bieter verkauft.

Bieter	1	2	3	4	5
Wert	9	1	20	11	14

Bieter teilen ihren Wert am Anfang mit durch ein "versiegeltes" Gebot.
Ergebniswahl: Gewinner ist Teilnehmer mit höchstem Gebot.
Zahlungen: Bestimme Zahlungen für ehrliches Verhalten

- Keine Zahlungen: Spieler versuchen unbeschränkt hohe Gebote abzugeben.
- Zahlung = Gebot: Spieler mit höchstem Wert versucht, das zweithöchste Gebot zu erraten und ein wenig höher zu bieten.

Vickreys Zweitpreis-Auktion

Zahlung des Siegers ist das zweithöchste Gebot.

Wert	9	1	20	11	14
Zahlung	0	0	14	0	0
Nutzen	0	0	6	0	0

Ein Mechanismus heißt anreizkompatibel wenn für jeden Spieler i und alle Gebote anderer Spieler eine ehrliche Offenlegung immer maximalen Nutzen für i liefert.

Proposition

Die Vickrey-Auction ist anreizkompatibel.

Beispiel

Wert	?	?	20	?	?
Gebot	5	11	x	2	14
Zahlung			14		
Nutzen			6		

Fall 1: i gewinnt mit ehrlichem Gebot $x = 20$, dann hat er für alle $x \geq 14$ Nutzen 6; für $x < 14$ Nutzen 0.

Wert	?	?	20	?	?
Gebot	5	11	x	2	24
Zahlung			0		
Nutzen			0		

Fall 2: i verliert mit ehrlichem Gebot $x = 20$, dann hat er für alle $x < 24$ Nutzen 0; für $x \geq 24$ Nutzen -4.

Definitionen

Mechanismen mit direkter Offenlegung

- Notation: $V = V_1 \times \ldots \times V_n$ und $v \in V$
- $v = (v_1, \ldots, v_n)$, v_i ist Typ von Spieler i
- Spieler "bietet": Teilt einen Typ an den Mechanismus mit
- Ergebnisfunktion $f : V \to A$, Zahlungsfunktionen $p_1, \ldots, p_n$
- $p_i : V \to \mathbb{R}$ gibt die Zahlungen an, die Spieler i leisten muss.

Anreizkompatibilität (engl: incentive compatibility (IC))

- Betrachte jeden Spieler i, jede Bewertung $v \in V$, und jede alternative Bewertung $v_i' \in V_i$.
- Wir schreiben für die Ergebnisse $a = f(v_i, v_{-i})$ und $b = f(v_i', v_{-i})$
- Mechanismus $(f, p_1, \ldots, p_n)$ ist anreizkompatibel wenn der Nutzen

$$v_i(a) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(b) - p_i(v_i', v_{-i})$$

.

Sealed-Bid Auktion

Bieter	1	2	3	4	5
Wert	9	1	20	11	14

- Ergebnisse $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, wobei i bedeutet "i gewinnt"

Ergebnis	1	2	3	4	5
v_1	9	0	0	0	0
v_2	0	1	0	0	0
etc.					

- Ergebniswahl: $f(v) = \arg\max_i \{v_i(i)\}$
- Zahlungen: $p_i(v) = 0$ wenn $f(v) \neq i$, sonst $p_i(v) = \max_{j \neq i} v_j(j)$.

VCG Mechanismus

Definition

Ein Vickrey-Clarke-Groves (VCG) Mechanismus ist gegeben durch

- $f(v) \in \arg\max_{a \in A} \sum_i v_i(a)$; und
- es gilt für jedes $v \in V$ und jeden Spieler i

$$p_i(v) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v)) \quad ,$$

mit $h_1, \ldots, h_n$ beliebigen Funktionen $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$.

Beobachtungen:

- VCG Mechanismus wählt ein Ergebnis a, das den sozialen Nutzen $\sum_j v_j(a)$ maximiert
- h_i hängt nicht vom eigenen "Gebot" v_i ab
- Nutzen von Spieler i bei $f(v) = a$ beträgt:

$$v_i(a) - p_i(v) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$$

VCG ist IC

Satz

Jeder VCG-Mechanismus ist anreizkompatibel.

Beweis:

- Für Bewertungen v, sei $v_i' \neq v_i$ eine "Lüge" für Spieler i
- Sei $a = f(v)$ und $b = f(v_i', v_{-i})$
- Nutzen von i wenn er v_i mitteilt: $v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - h_i(v_{-i})$
- Nutzen von i wenn er v_i' mitteilt: $v_i(b) + \sum_{j \neq i} v_j(b) - h_i(v_{-i})$
- Nutzen wird maximiert wenn Ergebnis sozialen Nutzen $\sum_j v_j(x)$ maximiert.
- VCG Mechanismus maximiert sozialen Nutzen, $\sum_j v_j(a) \geq \sum_j v_j(b)$.
- Wenn Spieler i v_i' mitteilt, dann wählt VCG b. b gibt optimalen sozialen Nutzen wenn i lügt, aber evtl. suboptimalen echten Nutzen.
- VCG passt die Anreize der Spieler an den sozialen Nutzen an. $\square$

Eigenschaften der Zahlungen

Definition

- Ein Mechanismus ist (ex-post) individuell rational wenn die Spieler immer nicht-negativen Nutzen erhalten. Für alle $v \in V$ und jeden Spieler i gilt $v_i(f(v)) - p_i(v) \geq 0$.
- Ein Mechanismus macht keine positiven Transfers wenn kein Spieler jemals Geld ausgezahlt bekommt. Für alle $v \in V$ und jeden Spieler i gilt $p_i(v) \geq 0$.

Definition (Clarke-Regel)

Die Funktion $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ heißt Clarke-Pivot-Regel.

Clarke Regel

Mit der Clarke-Regel ergeben sich die Zahlungen von Spieler i als

$$p_i(v) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v)) \ .$$

Die Zahlung ist der "Gesamtschaden", den alle anderen Spieler in ihren Bewertungen des Ergebnisses erfahren durch die Anwesenheit von i. Jeder Spieler *internalisiert die Externalitäten*.

Lemma

Ein VCG Mechanismus mit Clarke-Regel macht keine positiven Transfers. Wenn $v_i(a) \geq 0$ für alle $v_i \in V_i$ und $a \in A$, dann ist der Mechanismus individuell rational.

Clarke Regel

Beweis:

- Seien $a = f(v)$ und $b = \arg\max_{a' \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a')$
- Keine positiven Transfers (per Definition)

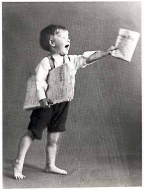
$$\sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq 0$$

- Individuell rational:

$$v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(b) \geq \sum_{j} v_j(a) - \sum_{j} v_j(b) \geq 0$$

$\square$

Beispiel: Bilateraler Handel



	Handel	kein Handel
Verkäufer	$-v_s$	0
Käufer	v_b	0

- Handel findet statt wenn $v_b > v_s$, kein Handel wenn $v_s > v_b$
- Analysiere VCG Mechanismus – er sollte den Handel nicht subventionieren.

Beispiel: Bilateraler Handel

	Handel	kein Handel
Verkäufer	$-v_s$	0
Käufer	v_b	0

- VCG Zahlungen für keinen Handel:
  Zahlungen Verkäufer: $h_s(v_b) - 0$, Zahlungen Käufer: $h_b(v_s) - 0$
  Keine zusätzlichen Zahlungen durch den Mechanismus, daher $h_s(v_b) = h_b(v_s) = 0$.
- VCG Zahlungen für Handel:
  Zahlungen Verkäufer: $h_s(v_b) - v_b$, Zahlungen Käufer: $h_b(v_s) + v_s$
  Verkäufer bekommt v_b, aber Käufer zahlt nur $v_s < v_b$.
- Kein *balanciertes Budget*: VCG Mechanismus subventionert den Handel!

Beispiel: Rückwärts-Auktion

- Auktionator kauft einen Service
- Jeder Teilnehmer bietet den Service an und hat interne Kosten
- Auktionator bezahlt die Teilnehmer
- Negativer Nutzen, negative Zahlungen
- Vickrey-Rückwärts-Auktion:
  Gewinner ist Teilnehmer mit niedigstem Gebot
  Zahlung an den Gewinner ist zweitniedrigstes Gebot

Korollar

Die Vickrey-Rückwärts-Auktion ist anreizkompatibel.

Vickrey-Rückwärts-Auktion ist IC

Fall 1: Mit ehrlichem Gebot gewinnt Spieler i.

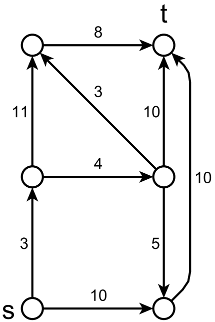
Wert	?	?	-7	?	?
Gebot	-9	-11	x	-17	-14
Zahlung			-9		
Nutzen			2		

Fall 2: Mit ehrlichem Gebot verliert Spieler i.

Wert	?	?	-12	?	?
Gebot	-9	-11	x	-17	-24
Zahlung			0		
Nutzen			0		

Beispiel: Kaufen eines Pfades im Netzwerk

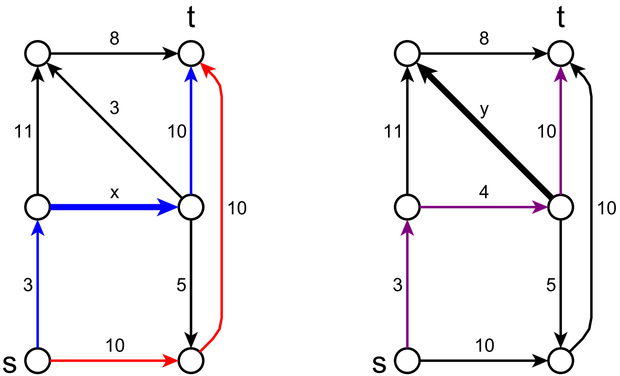
Rückwärts-Auktion:
Teilnehmer sind die Kanten in einem Netzwerk. Jede Kante e hat einen privaten Kostenwert c_e. Auktionator kauft einen s-t-Pfad.



Beispiel: Kaufen eines Pfades im Netzwerk

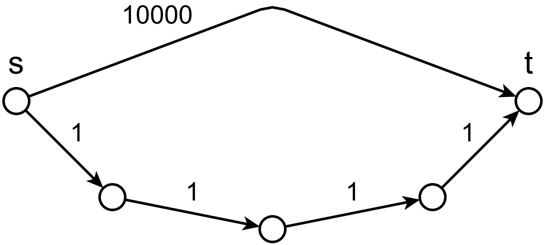
- Ergebnisse sind s-t-Pfade im Graph G
- VCG wählt günstigsten Pfad P^* bzgl. der mitgeteilten Kantenkosten c_e
- Zahlung an Kante $e \in P^*$ ist $h_e(c_{-e}) + \sum_{e' \in P^*, e' \neq e} c_{e'}$
- Clarke-Regel: $h_e(c_{-e}) = -\min_{P \in G-e} \sum_{e \in P} c_e$
- Gesamte Zahlung: $c(P^* - e) - c(P^*_{-e})$, wobei P^*_{-e} ein kürzester s-t-Pfad wenn G die Kante e nicht enthalten würde.
- Kante $e \notin P^*$ hat Kosten 0 und erhält keine Zahlungen.

Sag-die-Wahrheit ist eine dominante Strategie!



Frugalität

VCG ist anreizkompatibel, aber evtl. extrem TEUER!



Was gibt es für anreizkompatible Mechanismen?

VCG sind anreizkompatibel und maximieren sozialen Nutzen.

Welche anderen Funktionen f können wir *implementieren*, d.h. durch Zahlungen anreizkompatibel machen?

Gibt es noch andere Arten von anreizkompatiblen Mechanismen außer VCG?

Direkte Charakterisierung

Proposition

Ein Mechanismus ist anreizkompatibel genau dann wenn für jeden Spieler i und jedes v_{-i} gilt:

1. *Die Zahlung p_i hängt nicht von v_i ab, sondern nur vom Ergebnis – d.h. es gibt Preise $p_a(v_{-i}) \in \mathbb{R}$ so dass für jedes v_i mit $f(v_i, v_{-i}) = a$ gilt $p_i(v_i, v_{-i}) = p_a(v_{-i})$.*
2. *Der Mechanismus optimiert den Nutzen für jeden Spieler – d.h. für jedes v_i gilt $f(v_i, v_{-i}) \in \arg\max_{a \in A'} \{v_i(a) - p_a\}$, wobei A' die Menge der möglichen Ergebnisse für $f(\cdot, v_{-i})$.*

Beweis:
Offensichtlich: Bedingungen erfüllt $\Rightarrow$ Anreizkompatibel.

Beweis Direkte Charakterisierung

1. Zahlung $p_i = p_a$ hängt nicht ab von v_i, nur vom Ergebnis $a = f(v_i, v_{-i})$.
2. Mechanismus optimiert für jeden Spieler.

Anreizkompatibel $\Rightarrow$ Bedingungen erfüllt:

- Bedingung 1:
  $v_i \neq v_i'$ ergeben gleiches Ergebnis bei festem v_{-i}. Zahlung $p_i(v_i, v_{-i}) > p_i(v_i', v_{-i})$, dann will Spieler i mit v_i lieber lügen und v_i' mitteilen.

- Bedingung 2:
  Falls nicht, dann gibt es besseres Ergebnis $a' \in \arg\max_a(v_i(a) - p_a)$ und ein v_i' mit $a' = f(v_i', v_{-i})$. Also will Spieler i lieber lügen und v_i' mitteilen. $\square$

Affiner Maximierer

Definition

Eine Ergebnisfunktion f ist ein affiner Maximierer wenn es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, Spielergewichte $w_1, \ldots, w_n \geq 0$ und Ergebnisgewichte $c_a \in \mathbb{R}$ für jedes $a \in A'$ gibt, so dass

$$f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max_{a \in A'} \left\{ c_a + \sum_i w_i v_i(a) \right\}.$$

Proposition

Sei f ein affiner Maximierer, und sei h_i eine beliebige Funktion unabhängig von v_i. Spieler i mit $w_i = 0$ zahlt $p_i(v) = 0$. Spieler i mit $w_i > 0$ zahlt

$$p_i(v) = h_i(v_{-i}) - \frac{1}{w_i} \left(\sum_{j \neq i} w_j v_j(a) + c_a \right) .$$

Dann ist $(f, p_1, \ldots, p_n)$ anreizkompatibel.

(Nur) Affine Maximierer sind anreizkompatibel

Beweis:

- Für $w_i = 0$ hat i keinen Einfluß auf den Mechanismus.
- Mit $p_i = 0$ gleicher Nutzen für jedes Gebot von i.
- Für $w_i > 0$ sei oBdA $h_i = 0$. Nutzen von i wenn a gewählt wird:

$$v_i(a) + \frac{1}{w_i}\left(\sum_{j \neq i} w_j v_j(a) + c_a\right) .$$

- Multipliziere mit $w_i > 0$, Ausdruck maximal wenn $c_a + \sum_j w_j v_j(a)$ maximal.
- f affiner Maximierer, wahrer Typ ist dominante Strategie für i. $\square$

Satz (Roberts 1979)

Seien $|A| \geq 3$, f bildet voll auf A ab, $V_i = \mathbb{R}^A$ für jeden Spieler i, und $(f, p_1, \ldots, p_n)$ anreizkompatibel. Dann ist f ein affiner Maximierer.

"Zeugs mal Wert"-Bewertungen

Im Single-Parameter-Fall haben die Bewertungen eine einfache Struktur.

- In Ergebnis $a \in A$ erhält Spieler i eine Menge von "Zeugs"
- Sei $x_i(a) \in \mathbb{R}$ die Menge an "Zeugs", die Spieler i in Ergebnis a erhält
- Bewertung mit einzelnem privaten Parameter:

  Wert pro Einheit Zeugs: $t_i \in \mathbb{R}$
  Bewertungsfunktion: $v_i(a) = t_i \cdot x_i(a)$

Definition

Ein Single-Parameter Bereich V_i ist gegeben durch (öffentlich bekannte) Funktion $x_i : A \to \mathbb{R}$ und Wertebereich $[t_i^0, t_i^1]$. Die Menge V_i enthält alle v_i so dass für ein $t_i^0 \leq t_i \leq t_i^1$ gilt

$$v_i(a) = t_i \cdot x_i(a) \ .$$

Wir überladen die Notation: v_i bezeichnet sowohl Funktion als auch Parameter.

Beispiele

Einfache Beispiele:

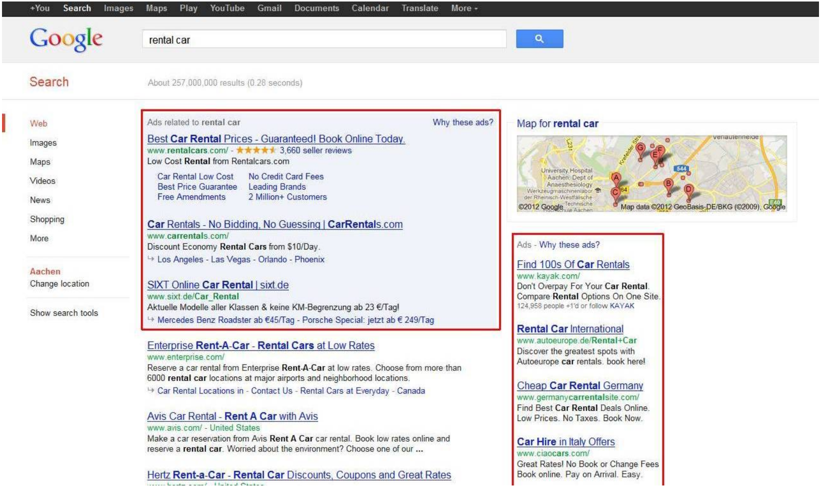
- Ein-Gut-Auktion: $x_i(a) \in \{0, 1\}$ und $\sum_i x_i(a) \leq 1$.
- k identische Güter: $x_i(a) \in \{0, 1, \ldots, k\}$ und $\sum_i x_i(a) \leq k$.
- s-t-Pfad: $x_e(a) \in \{0, 1\}$ und $P(x) = \{e \mid x_e(a) = 1\}$ ist s-t-Pfad in G.

Sponsored-Search-Auktion

- Eine Webseite mit Suchresultaten hat mehrere Slots für Werbeanzeigen
- Suchmaschine versteigert diese Anzeigeslots an Werbekunden
- Slot k hat eine bekannte Anklickrate $\alpha_k \geq 0$
- Firma i hat privaten Wert v_i pro Klick auf ihre Anzeige
- Im Ergebnis $a \in A$ werden Anzeigenslots an Firmen zugewiesen
- $x_i(a) = \alpha_k$ wenn Firma i einen Slot k erhält, sonst $x_i(a) = 0$
- Bewertung der Firma $v_i(a) = v_i \cdot x_i(a)$

Gibt es anreizkompatible Mechanismen, die keine affinen Maximierer sind?

Sponsored-Search-Auktionen



Beispiel: Zweithöchstes Gebot gewinnt

Wir versteigern ein einzelnes Gut und geben es dem zweithöchsten Bieter. Gibt es Zahlungen, mit denen der Mechanismus anreizkompatibel wird?

Betrachte einen Bieter i und fixiere die anderen Gebote v_{-i}.

Es gilt $x_i(a) \in \{0, 1\}$. Direkte Charakterisierung zeigt: i zahlt immer nur p_i^1 oder p_i^0, je nachdem ob er zweithöchster Bieter ist oder nicht.

Sei y ein Gebot, mit dem i zweithöchster Bieter wird, und z eines mit dem er höchster Bieter wird, mit $y < z$.

Wenn $v_i = y$ soll i nicht z lügen, also: $\quad y \cdot 1 - p_i^1 \geq y \cdot 0 - p_i^0$.
Wenn $v_i = z$ soll i nicht y lügen, also: $\quad z \cdot 0 - p_i^0 \geq z \cdot 1 - p_i^1$.

Daraus folgt $y \geq z$, ein Widerspruch.

Es gibt keine Zahlungen, so dass der Mechanismus anreizkompatibel wird. Die Ergebnisfunktion ist nicht monoton – ein höheres Gebot kann die Menge an erhaltenem Zeugs verringern.

Monotonie

Definition

Eine Ergebnisfunktion f für Single-Parameter Bereiche $V_1, \ldots, V_n$ ist monoton in v_i wenn für jedes v_{-i} und jedes $v_i' \in V_i$ mit $v_i' \geq v_i$ gilt

$$x_i(f(v_i', v_{-i})) \quad \geq \quad x_i(f(v_i, v_{-i})) \ .$$

Normalisierter Mechanismus: Beim kleinsten Gebot t_i^0 bekommt Spieler i nie Zeugs und zahlt nichts, d.h. $x_i(t_i^0, v_{-i}) = 0$ und $p_i(t_i^0, v_{-i}) = 0$ für alle v_{-i}.

Charakterisierung

Satz (Myersons Lemma)

Ein normalisierter Mechanismus $(f, p_1, \ldots, p_n)$ für Single-Parameter Bereiche ist anreizkompatibel genau dann wenn die folgenden Bedingungen gelten:

- *Die Ergebnisfunktion f ist monoton in jedem v_i*
- *Die Zahlungen sind gegeben durch*

$$p_i(v_i, v_{-i}) = v_i \cdot x_i(f(v)) - \int_{t_i^0}^{v_i} x_i(f(t, v_{-i}))dt.$$

Beweis:

Fixiere v_{-i}. Seien $y < z$ zwei mögliche private Werte von i. Wir schreiben $a_y = f(y, v_{-i})$ und $a_z = f(z, v_{-i})$.

Beweis Myersons Lemma

Anreizkompatibel bedeutet:

$$y \cdot x_i(a_y) - p_i(a_y) \geq y \cdot x_i(a_z) - p_i(a_z) \quad (1)$$

und

$$z \cdot x_i(a_z) - p_i(a_z) \geq z \cdot x_i(a_y) - p_i(a_y) \quad (2)$$

Summiere (1) und (2) und stelle um:

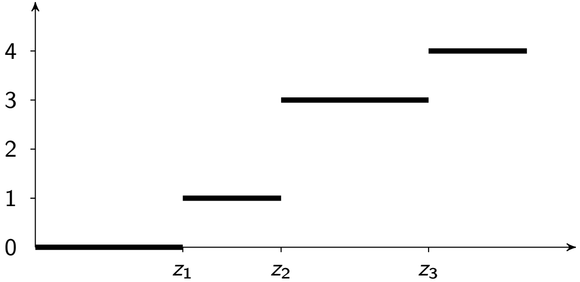
$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \geq y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Da $z > y$, folgt $x_i(a_z) \geq x_i(a_y)$, also f monoton ist notwendig.

Ist f monoton auch hinreichend? Wenn f monoton, dann müssen die Zahlungen zumindest genau wie in der Formel sein – wir beweisen das nur im Spezialfall für $x_i(a) \in \mathbb{N}$.

Beweis Myersons Lemma

Sei x_i monoton und $x_i(a) \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$, eine Treppenfunktion. x_i springt bei $z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_\ell$ um $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$, wobei $\sum_{j=1}^{\ell} k_j \leq k$.



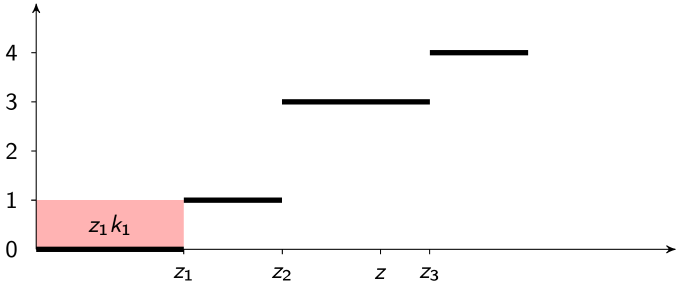
Beweis Myersons Lemma

(1) und (2) liefern

$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \quad \geq \quad p_i(a_z) - p_i(a_y) \quad \geq \quad y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Also ist $p_i(a_z) = p_i(a_y)$ wenn $x_i(a_z) = x_i(a_y)$. Sei $z = z_i$ und $y = z_i - \varepsilon$, dann zeigt $\varepsilon \to 0$, dass p_i bei z_i um $z_i k_i$ springt. Damit

$$p_i(a_z) \quad = \quad \sum_{j : z_j \leq z} z_j k_j \quad = \quad z \cdot x_i(a_z) - \int_{t_i^0}^{z} x_i(a_t) dt \; .$$



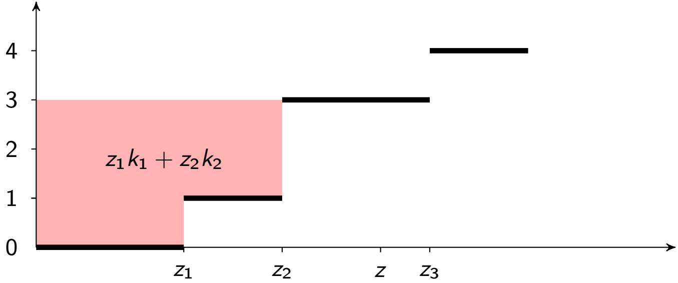
Beweis Myersons Lemma

(1) und (2) liefern

$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \quad \geq \quad p_i(a_z) - p_i(a_y) \quad \geq \quad y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Also ist $p_i(a_z) = p_i(a_y)$ wenn $x_i(a_z) = x_i(a_y)$. Sei $z = z_i$ und $y = z_i - \varepsilon$, dann zeigt $\varepsilon \to 0$, dass p_i bei z_i um $z_i k_i$ springt. Damit

$$p_i(a_z) \quad = \quad \sum_{j: z_j \leq z} z_j k_j \quad = \quad z \cdot x_i(a_z) - \int_{t_i^0}^{z} x_i(a_t) dt \ .$$



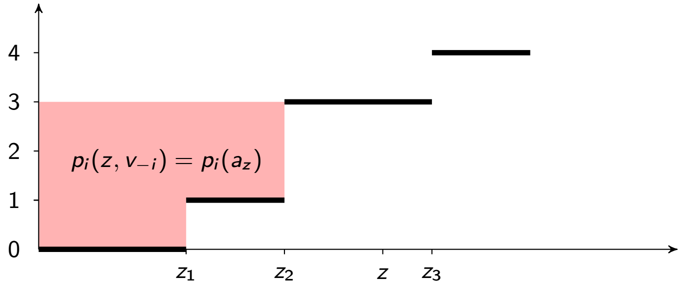
Beweis Myersons Lemma

(1) und (2) liefern

$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \quad \geq \quad p_i(a_z) - p_i(a_y) \quad \geq \quad y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Also ist $p_i(a_z) = p_i(a_y)$ wenn $x_i(a_z) = x_i(a_y)$. Sei $z = z_i$ und $y = z_i - \varepsilon$, dann zeigt $\varepsilon \to 0$, dass p_i bei z_i um $z_i k_i$ springt. Damit

$$p_i(a_z) \quad = \quad \sum_{j : z_j \leq z} z_j k_j \quad = \quad z \cdot x_i(a_z) - \int_{t_i^0}^{z} x_i(a_t) dt \ .$$



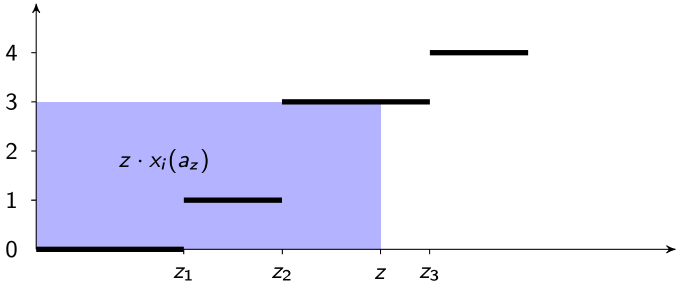
Beweis Myersons Lemma

(1) und (2) liefern

$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \quad \geq \quad p_i(a_z) - p_i(a_y) \quad \geq \quad y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Also ist $p_i(a_z) = p_i(a_y)$ wenn $x_i(a_z) = x_i(a_y)$. Sei $z = z_i$ und $y = z_i - \varepsilon$, dann zeigt $\varepsilon \to 0$, dass p_i bei z_i um $z_i k_i$ springt. Damit

$$p_i(a_z) \quad = \quad \sum_{j: z_j \leq z} z_j k_j \quad = \quad z \cdot x_i(a_z) - \int_{t_i^0}^{z} x_i(a_t) dt \ .$$



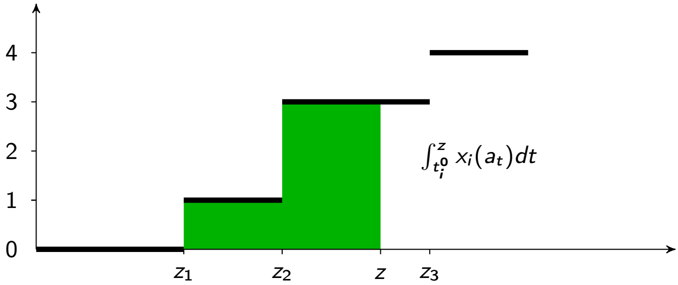
Beweis Myersons Lemma

(1) und (2) liefern

$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \quad \geq \quad p_i(a_z) - p_i(a_y) \quad \geq \quad y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Also ist $p_i(a_z) = p_i(a_y)$ wenn $x_i(a_z) = x_i(a_y)$. Sei $z = z_i$ und $y = z_i - \varepsilon$, dann zeigt $\varepsilon \to 0$, dass p_i bei z_i um $z_i k_i$ springt. Damit

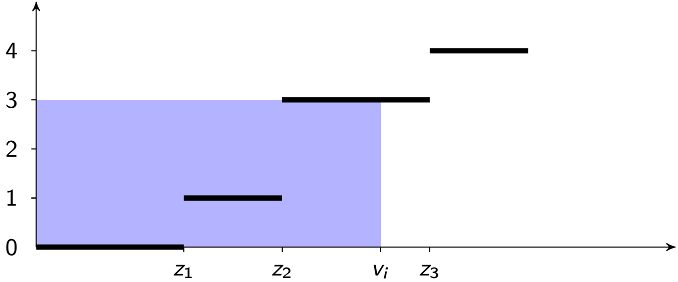
$$p_i(a_z) \quad = \quad \sum_{j : z_j \leq z} z_j k_j \quad = \quad z \cdot x_i(a_z) - \int_{t_i^0}^{z} x_i(a_t) dt \; .$$



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

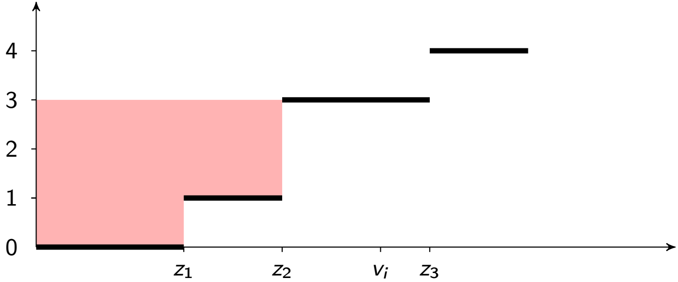
Bewertung bei wahrem Gebot:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

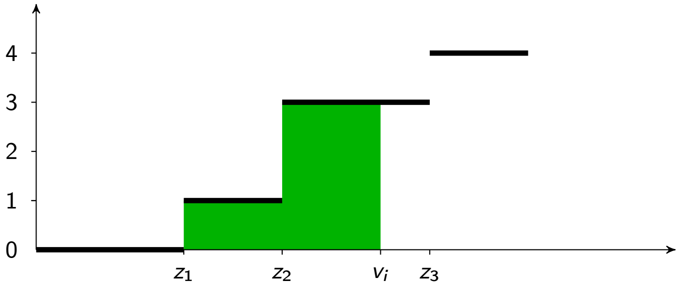
Zahlung bei wahrem Gebot:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

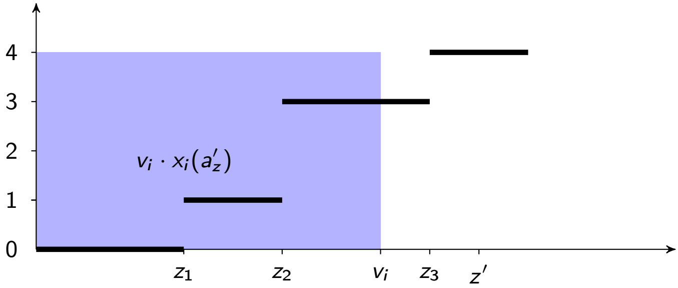
Nutzen bei wahrem Gebot:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

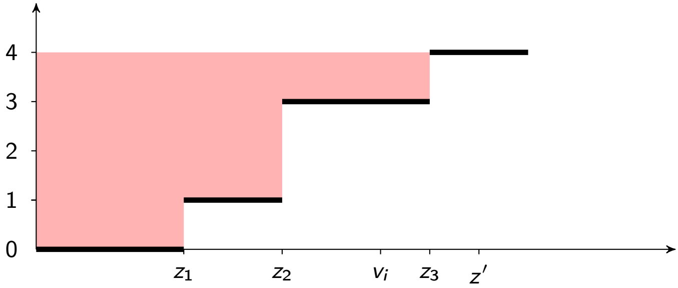
Bewertung bei Gebot $z' > v_i$:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

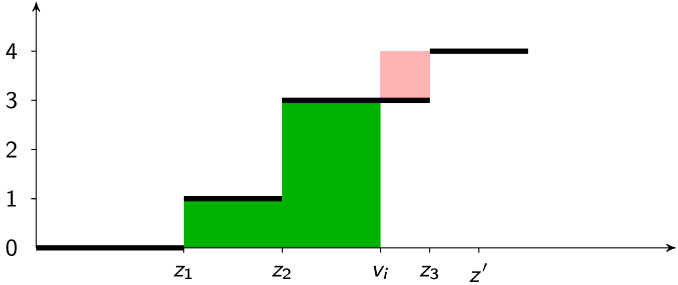
Zahlung bei Gebot $z' > v_i$:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

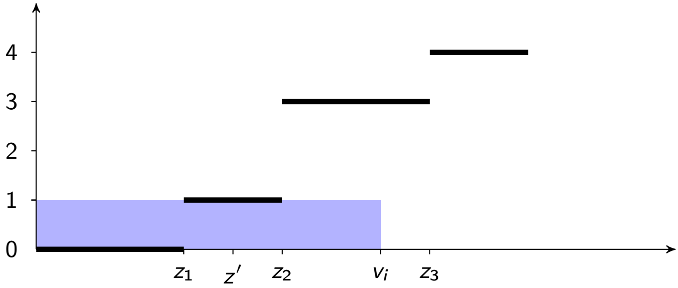
Nutzen bei Gebot $z' > v_i$ ist nicht besser!



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

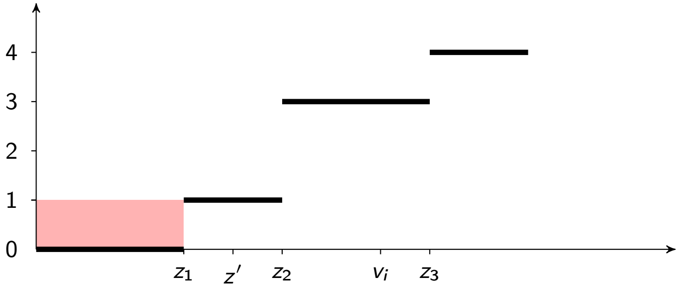
Bewertung bei Gebot $z' < v_i$:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

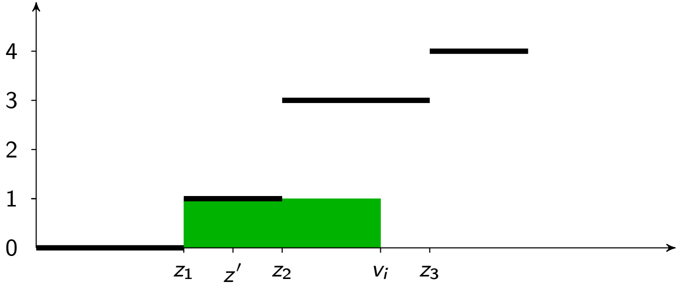
Zahlung bei Gebot $z' < v_i$:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

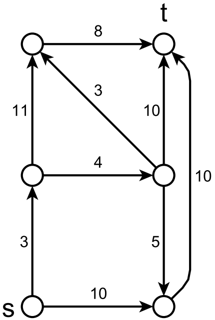
Nutzen bei Gebot $z' < v_i$ ist nicht besser!



□

Beispiel: Kaufen eines Pfades im Netzwerk (Teil 2)

Rückwärtsauktion und Min-Max-Pfade:
Teilnehmer sind die Kanten in einem Netzwerk. Jede Kante e hat einen privaten Kostenwert c_e. Auktionator kauft einen s-t-Pfad.

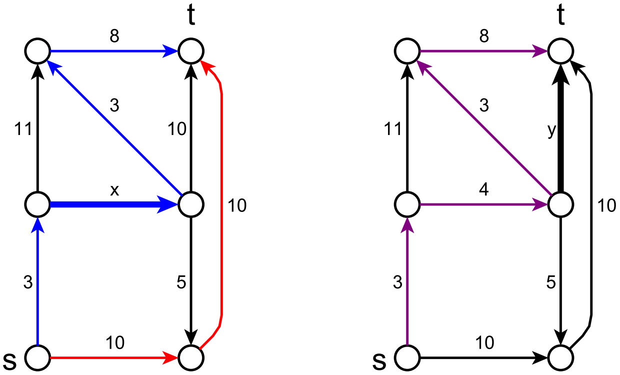


Der gekaufte Pfad P^* soll den maximalen Kostenwert einer Kante minimieren.

Min-Max ist monoton!

Verringert e sein Gebot, kann er nur in P^* kommen oder bleiben. Monotones $x_i(f(v_i, v_{-i})) \in \{0, 1\}$, höchstens ein Treppenschritt. Anreizkompatibel:

$e \notin P^*$ erhält keine Zahlung.
$e \in P^*$ erhält maximale Kantenkosten auf Min-Max-Pfad in $G - \{e\}$



Ertragsmaximierung

Bisher war Geld nur Mittel zum Zweck, um den Mechanismus anreizkompatibel zu machen. Hier betrachten wir Geld als Zielfunktion des Mechanismus.

Ein-Gut-Auktion mit einem Bieter

Anreizkompatible Mechanismen sind *Fixpreis-Mechanismen*:

- Wähle Preis $p \geq 0$ (evtl. zufällig) unabhängig vom Gebot.
- Verkaufe das Gut wenn Gebot $v_i \geq p$.

Maximiere sozialen Nutzen: $p = 0$.
Maximiere Ertrag: ??

Für Ertragsmaximierung brauchen wir (zumindest teilweise) Informationen über die möglichen Bewertungen der Bieter. Ansonsten kann der erzielte Ertrag beliebig niedriger sein als der optimale Ertrag.

Average-Case und Verteilungen über Bewertungen

- Single-Parameter Bereich für jeden Spieler i
- Verteilung $\mathcal{V}_i$ für den privaten Parameter, $v_i \sim \mathcal{V}_i$
- Verteilungsvektor $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n)$
- Privater Wert von Spieler i wird unabhängig aus den $\mathcal{V}_i$ gezogen: Spieler i hat immer gleiche Verteilung von v_i, egal was die anderen Spieler an Wert bekommen.
- Mechanismus basiert auf Verteilungen, ist aber immer anreizkompatibel: Sag-die-Wahrheit ist dominante Strategie für jeden Spieler i, für jeden möglichen Wert v_i, und für alle möglichen Werte v_{-i}
- Spieler kennt Verteilungen nicht (bzw. sein Wissen darüber ändert nichts daran, dass er immer die Wahrheit sagen will)
- Verteilungen wichtig nur für Entwurf und Analyse des Mechanismus, nicht für das strategische Verhalten der Spieler.

Verteilungen

Die Verteilungsfunktion $F_i(x)$ für Verteilung $\mathcal{V}_i$ ist $F_i(x) = \Pr_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[v_i \leq x]$.
Sie hat die Dichte $f_i(x)$ und es gilt $F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(x) dx$.

Beispiel Ein-Gut-Auktion mit einem Bieter:
Mit Preis p ergibt sich Ertrag $p \cdot (1 - F_i(p))$. Sei z.B. $\mathcal{V}_i$ uniform auf $[0, 1]$, dann $F_i(x) = x$ für $x \in [0, 1]$. Optimaler Ertrag $1/4$ für $p = 1/2$.

Definition

Ein optimaler Mechanismus ist ein anreizkompatibler Mechanismus $(f, p_1, \ldots, p_n)$, der den erwarteten Ertrag maximiert

$$\mathbb{E}_{v \sim \mathcal{V}} \left[\sum_i p_i(v) \right] \quad .$$

Anstatt die Zahlungen direkt anzuschauen, betrachten wir erst einen etwas anderen Wert.

Virtuelle Werte

Definition

Für Spieler i, sei v_i der Wert, F_i seine Verteilungsfunktion und f_i die Dichte der Verteilung. Dann ist der virtuelle Wert von Spieler i

$$\varphi_i(v_i) \quad = \quad v_i - \frac{1 - F(v_i)}{f_i(v_i)} \quad .$$

Es gilt immer $v_i \geq \varphi(v_i)$. Es kann passieren, dass $v_i \geq 0$ und $\varphi_i(v_i) \leq 0$.

Intuition: Wir möchten v_i als Preis setzen, müssen aber $(1 - F(v_i)/f_i(v_i)$ für die ehrliche Information "bezahlen".

Beispiel mit uniformer Verteilung auf [0,1]:

- $F(x) = x$ und $f(x) = 1$ für $x \in [0, 1]$.
- Damit: $\varphi(v_i) = v_i - (1 - v_i)/1 = 2v_i - 1$

Virtuelle Werte und Zahlungen

Für jeden Spieler sind die *erwarteten* Zahlungen gleich dem *erwarteten* virtuellen Wert.

Lemma

Sei $(f, p_1, \ldots, p_n)$ ein anreizkompatibler Mechanismus in einem Single-Parameter Bereich und sei $\mathcal{V}_i$ die Verteilung von Spieler i. Dann gilt für jeden Spieler i und jedes v_{-i}

$$\mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[p_i(v_i, v_{-i})] \quad = \quad \mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[\varphi_i(v_i) \cdot x_i(f(v_i, v_{-i}))] \ .$$

Wir beweisen das Lemma am Ende.

Für die Gesamtzahlung betrachten wir den virtuellen Nutzen $\sum_i \varphi_i(v_i) \cdot x_i(f(v))$.

Erwartete Zahlungen sind virtueller Nutzen

Aus dem Lemma folgt das zentrale Resultat: Die *erwarteten Zahlungen* sind gleich dem *erwarteten virtuellen Nutzen*.

Satz

Sei $(f, p_1, \ldots, p_n)$ ein anreizkompatibler Mechanismus in einem Single-Parameter Bereich uns sei $\mathcal{V}$ der Vektor der Verteilungen. Dann gilt:

$$\mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}\left[\sum_i p_i(v)\right] \quad = \quad \mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}\left[\sum_i \varphi_i(v_i)\cdot x_i(f(v))\right] \quad .$$

Daher können wir uns beim Maximieren vom Ertrag auf die Optimierung des virtuellen Nutzens konzentrieren. Das ist in vielen Fällen sehr ähnlich zur Optimierung des sozialen Nutzens.

Beweis

Beweis (Satz):
Wir nehmen die Aussage des Lemmas und nutzen den Erwartungswert über v_{-i}:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}[p_i(v)] &= \mathbb{E}_{v_{-i}\sim\mathcal{V}_{-i}}\mathbb{E}_{v_i\sim\mathcal{V}_i}[p_i(v_i, v_{-i})] \\
&= \mathbb{E}_{v_{-i}\sim\mathcal{V}_{-i}}\mathbb{E}_{v_i\sim\mathcal{V}_i}[\varphi_i(v_i)\cdot x_i(f(v_i, v_{-i}))] \\
&= \mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}[\varphi_i(v_i)\cdot x_i(f(v))]\ .
\end{aligned}$$

Mit der Linearität des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}\left[\sum_i p_i(v)\right] &= \sum_i \mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}\left[p_i(v)\right] \\
&= \sum_i \mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}[\varphi_i(v_i)\cdot x_i(f(v))] \\
&= \mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}\left[\sum_i \varphi_i(v_i)\cdot x_i(f(v))\right]\ . \qquad \square
\end{aligned}$$

Optimale Auktion

Ein optimaler anreizkompatibler Mechanismus (maximiert die Zahlungen, daher) maximiert also den virtuellen Nutzen!

Gilt auch umgekehrt: Ein Mechanismus, der den virtuellen Nutzen maximiert, ist ein optimaler anreizkompatibler Mechanismus?

Ja, aber nur wenn der virtuelle Nutzen eine *monotone Funktion in jedem v_i ist*! Sonst ist der Mechanismus nicht anreizkompatibel. Eine hinreichende Bedingung sind reguläre Verteilungen:

Definition

Verteilung $\mathcal{V}_i$ heißt regulär wenn der virtuelle Wert $\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v)}{f_i(v)}$ nicht-fallend in v_i ist.

Korollar

Der optimale Mechanismus mit maximalem Ertrag in Single-Parameter Bereichen mit regulären Verteilungen $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ optimiert den virtuellen Nutzen der Spieler.

Optimale Mechanismen für Reguläre Verteilungen

Zwei Verallgemeinerungen:

– Wir nehmen nun an, die Spieler kennen alle Verteilungen und haben Gebotsstrategien. Sie geben Gebote ab abhängig von ihrem realisierten Wert und den Gebotsstrategien der anderen Spieler und deren (zufälligen) Werten. Ein Mechanismus ist *Bayes-anreizkompatibel*, wenn Sag-die-Wahrheit ein Gleichgewicht in diesem Spiel ist (ein sog. Bayes-Nash-Gleichgewicht). Auch hier gilt, dass Maximierung des virtuellen Nutzens den optimalen Ertrag liefert. Für reguläre Verteilungen ergibt dies also sogar den optimalen Bayes-anreizkompatiblen Mechanismus.

– Für nicht-reguläre Verteilungen ist es möglich, die virtuellen Werte monoton zu machen (sog. *Bügeln*, engl: Ironing). So bekommt man den maximalen Ertrag auch für nicht-reguläre Verteilungen: Durch Optimierung des (gebügelten) virtuellen Nutzens.

Optimale Mechanismen sind erstaunlich einfach!

Beispiel: Ein-Gut-Auktion mit regulären Verteilungen

- Gut geht an Bieter mit *bestem virtuellen Wert* $\max_i \varphi_i(v_i)$.
- Reguläre Verteilung: $\varphi_i(v)$ monoton in v, also Bieter mit bestem Wert
- Was wenn $\max_i \varphi_i(v_i)$ negativ ist? Dann wird das Gut gar nicht vergeben.
- Der Wert $\varphi_i^{-1}(0)$ ist also ein Reservationspreis für Bieter i: Er muss mindestens $v_i^R = \varphi_i^{-1}(0)$ bieten, um überhaupt für das Gut in Frage zu kommen.
- Wenn Spieler i das Gut bekommt, zahlt er $\max(v_i^R, \max_{j \neq i} v_j)$.
- Optimale Auktion ist Zweitpreisauktion mit Reservationspreisen.
- Beispiel alle $\mathcal{V}_i$ uniform auf $[0, 1]$: Alle Reservationspreise sind $1/2$.

Beweis des Lemmas

Beweisidee (Lemma):
Sei $a(t) = f(t, v_{-i})$ für feste Gebote v_{-i}. Wir wollen zeigen:

$$\mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[p_i(v_i, v_{-i})] = \mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[\varphi_i(v_i) \cdot x_i(a(v_i))] \ .$$

Dafür nutzen wir Myersons Lemma. Sei oBdA $t_i^0 = 0$. Dann gilt für die Zahlungen

$$\begin{aligned} p_i(v_i, v_{-i}) &= v_i \cdot x_i(a(v_i)) - \int_0^{v_i} x(a(t))dt \\ &= \int_0^{v_i} t \cdot x'(a(t))dt \end{aligned}$$

mit partieller Integration. Wir nehmen hier an, dass x differenzierbar ist. Wenn x monoton und beschränkt ist, dann folgt der Beweis ähnlich, mit einigen weiteren Argumenten und einer passenden Interpretation der Ableitung x'.

Beweis des Lemmas

Schritt 1:
Der erwartete Ertrag von Spieler i bei festen Geboten v_{-i} ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[p_i(v_i, v_{-i})] &= \int_0^{t_i^1} p_i(z, v_{-i})\, f_i(z) dz \\ &= \int_0^{t_i^1} \left[\int_0^z t \cdot x'(a(t)) dt\right] f_i(z) dz\end{aligned}$$

Die erste Gleichung nutzt Unabhängigkeit der Verteilungen – dadurch hat das feste v_{-i} keinen Einfluß auf $\mathcal{V}_i$.

Schritt 2:
Jetzt müssen wir ein wenig vereinfachen. Wir vertauschen die Integrationen:

$$\begin{aligned}\int_0^{t_i^1} \left[\int_0^z t \cdot x'(a(t)) dt\right] f_i(z) dz &= \int_0^{t_i^1} \left[\int_t^{t_i^1} f_i(z) dz\right] t \cdot x'(a(t)) dt \\ &= \int_0^{t_i^1} (1 - F_i(t)) \cdot t \cdot x'(a(t)) dt\end{aligned}$$

was den Ausdruck klarer werden lässt.

Beweis des zentralen Lemmas

Schritt 3:
Wir versuchen wieder partielle Integration durchzuführen. Wir nutzen:

$$g(t) = (1 - F_i(t)) \cdot t \qquad \text{und} \qquad h'(t) = x_i'(a(t))$$

Mit partieller Integration ergibt dies

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[p_i(v_i, v_{-i})] &= (1 - F_i(t)) \cdot t \cdot x(a(t))\Big|_0^{t_i^1} \\
&\quad - \int_0^{t_i^1} x_i(a(t)) \cdot (1 - F_i(t) - t \cdot f_i(t))dt \\
&= \int_0^{t_i^1} \left(t - \frac{1 - F_i(t)}{f_i(t)}\right) \cdot x_i(a(t)) \cdot f_i(t)dt \\
&= \int_0^{t_i^1} \varphi_i(t) \cdot x_i(a(t)) \cdot f_i(t)dt \\
&= \mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[\varphi_i(t) \cdot x_i(a(v_i))]
\end{aligned}$$

wie erhofft.

Eine Alternative

Obwohl die optimale Auktion relativ einfach aussieht, kann sie sich als äußerst schwierig erweisen. Selbst für ein einzelnes Gut brauchen wir eventuell bis zu n verschiedene Reservationspreise, und damit Wissen über jede der Verteilungen $\mathcal{V}_i$. Dagegen gibt es im Fall der Ein-Gut-Auktion eine sehr viel einfachere Alternative für mehr Ertrag – mehr Wettbewerb!

Das folgende Resultat betrachtet Ertrag einer optimalen Ein-Gut-Auktion mit gleichen regulären Verteilungen für die Spieler. Es braucht nur einen weiteren Spieler, dann ist der Ertrag der einfachen Vickrey Auktion schon besser.

Beweis

Satz (Bulow, Klemperer 1996)

Sei $\mathcal{V}$ eine reguläre Verteilung und $n \in \mathbb{N}$. Seien p die Zahlungen der Vickrey Zweitpreisauktion mit $n+1$ Spielern und p^* die der optimalen (für $\mathcal{V}$) Auktion mit n Spielern. Dann gilt

$$\mathbb{E}_{v \sim \mathcal{V}^{n+1}}\left[\sum_{i=1}^{n+1} p_i(v)\right] \quad \geq \quad \mathbb{E}_{v \sim \mathcal{V}^{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i^*(v)\right] \quad .$$

Beweis:

Für die Analyse betrachten wir eine fiktive Auktion:

1. Simuliere die optimale n-Spieler Auktion für $\mathcal{V}$ auf Spielern $1, \ldots, n$
2. Wenn das Gut nicht zugewiesen wurde, gib es Spieler $n+1$ umsonst.

Offensichtliche Eigenschaften:

- Der erwartete Ertrag der fiktiven Auktion für $n+1$ Spieler ist genau der erwartete Ertrag der optimalen Auktion für n Spieler.
- Die fiktive Auktion gibt das Gut immer an einen der Spieler.

Beweis

Betrachte nun die optimale Auktion für $n+1$ Spieler, die immer das Gut zuweisen muss. Sie maxmimiert den virtuellen Nutzen (unter der Bedingung, dass das Gut immer zugewiesen sein muss). Also gibt sie das Gut immer an den höchsten Bieter, selbst wenn sein virtueller Wert negativ ist.

Die Zweitpreisauktion weist das Gut immer an den Spieler mit höchstem Wert zu. $\mathcal{V}$ ist regulär, also ist das auch der Spieler mit dem höchsten virtuellen Wert. Das ist also genau die optimale Auktion, die immer das Gut zuweisen muss.

Die fiktive Auktion für $n+1$ Spieler muss immer das Gut zuweisen und hat den Ertrag der optimalen Auktion für n Spieler mit Verteilung $\mathcal{V}$.

Die Vickrey Zweitpreisauktion für $n+1$ Spieler muss immer das Gut zuweisen und hat den besten Ertrag (bzgl. $\mathcal{V}$) aller solcher Auktionen. □

Allgemeines Modell mit m heterogenen Gütern

Kombinatorische Auktion:

- Menge M von m unteilbaren Güten (z.B., Werbeslots)
- Alle Güter werden gleichzeitig verkauft
- Bewertung von Spieler i für jede Teilmenge von Gütern
- Wer bekommt welches Gut und zahlt wie viel?
- *Allgemeines Allokationsproblem mit abhängigen Ressourcen*

Bewertungsfunktion v_i für Spieler i:

- $v_i(S) \in \mathbb{R}$ wenn er Gütermenge $S \subseteq M$ bekommt
- Kostenloses Wegwerfen: $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$
- Normalisiert: $v(\emptyset) = 0$.

Allokation

- Allokation der Güter:
  $S_1, \ldots, S_n$ mit $\bigcup_i S_i \subseteq M$ und $S_i \cap S_j = \emptyset$ for $i \neq j$.
- Bewertung eines Spielers unabhängig von der Güterverteilung der anderen Spieler (keine Externalitäten)
- Sozialer Nutzen: $\sum_i v_i(S_i)$.
  Sei $S^* = (S_1^*, \ldots, S_n^*)$ eine Allokation mit maximalem sozialen Nutzen.
- Quasi-linearer Nutzen für jeden Spieler: $v_i(S_i) - p_i(v_i, v_{-i})$
- VCG nutzt S^* und ist anreizkompatibel, aber Berechnung von S^* ist NP-hart!
- Wie melden die Spieler ihre Bewertungen an den Auktionator? v_i kann bis zu 2^m verschiedene Werte annehmen (zu hohe Kommunikationskomplexität).
- Wir betrachten hier einen Spezialfall.

Single-Minded erweitert binäre Single-Parameter

Definition

Eine Bewertungsfunktion v_i ist single-minded wenn es eine Grenzmenge S^t und einen Wert $v^t \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass $v_i(S) = v^t$ wenn $S \supseteq S^t$, und $v_i(S) = 0$ sonst. Ein single-minded Gebot ist (S^t, v^t).

Single-minded erweitert binäres Single-Parameter:

- Binärer Single-Parameter Bereich:
  Es gibt $W_i \subseteq A$ mit $v_i(a) = v^t$ für alle $a \in W_i$ and 0 sonst.
- Hier ist $W_i \subseteq A$ eine öffentlich bekannte Menge.
- Single-minded Spieler können über S^t lügen.
- Ein binäres Single-Parameter Gebot ist v^t
- Ein single-minded Gebot ist (S^t, v^t).

Allokationsproblem (Siegerauswahl)

Definition

Das Allokations- oder Siegerauswahlproblem mit single-minded Spielern:

`INPUT:` (S_i^t, v_i^t) für jeden Spieler $i = 1, \ldots, n$

`OUTPUT:` Menge von Siegern $W \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit maximalen sozialen Nutzen $\sum_{i \in W} v_i^t$ und $S_i^t \cap S_j^t = \emptyset$ für alle $i, j \in W$ mit $i \neq j$

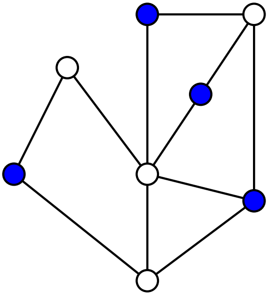
Sogar in diesem eingeschränkten Fall ist die Berechnung einer optimalen Allokation schon sehr schwer.

Satz

Das Allokationsproblem mit single-minded Spielern ist NP-hart.

Reduktion von Independent Set

Beweis:
INDEPENDENT SET Problem:
Hat ein Graph ein Independent Set der Größe mindestens k?



Knoten $\rightarrow$ Spieler, Kanten $\rightarrow$ Güter
$(S_i^t, v_i^t) =$ (Menge der inzidenten Kanten von i, 1) $\square$

Approximationsalgorithmen

- c-Approximationsalgorithmus: Liefert eine Allokation T mit

$$\sum_i v_i(T_i) \quad \geq \quad \frac{1}{c} \cdot \sum_i v_i(S_i^*)$$

- Triviale n-Approximation:
  Spieler mit maximaler Bewertung bekommt alle Güter.
  Trivial: Anreizkompatibel – wir behandeln M wie ein einzelnes Gut
  (also eine Vickrey-Zweitpreisauktion)

Satz

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist es NP-hart, INDEPENDENT SET mit einem Faktor von weniger als $n^{1-\varepsilon}$ zu approximieren.

Korollar

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist es NP-hart, das Allokationsproblem mit single-minded Spielern mit einem Faktor von weniger als $n^{1-\varepsilon}$ zu approximieren.

Approximationsalgorithmen

Der Graph in der Reduktion hat höchstens $m < n^2$ Kanten/Güter, daher

Proposition

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist es NP-hart, das Allokationsproblem mit single-minded Spielern mit einem Faktor von weniger als $m^{1/2-\varepsilon}$ zu approximieren.

Beachte: $\sqrt{m} < n$ für dünn besetzte Graphen.

Bisher liefert der beste Algorithmus eine n-Approximation. Können wir einen anreizkompatiblen Mechanismus entwerfen, dessen Allokation eine $\sqrt{m}$-Approximation darstellt?

Greedy-Mechanismus für Single-Minded Spieler

INPUT: (S_i^t, v_i^t) für jeden Spieler i

OUTPUT: Eine Menge von Siegern W, Zahlungen p_j für jedes $1 \leq j \leq n$.

Initialisierung:

1. Sortiere Gebote: $\frac{v_1^t}{\sqrt{|S_1^t|}} \geq \ldots \geq \frac{v_n^t}{\sqrt{|S_n^t|}}$
2. $W \leftarrow \emptyset$, $p_i = 0$ for all i

Iteration:

3. For $i = 1 \ldots n$ do: If $S_i^t \cap \left(\bigcup_{j \in W} S_j^t\right) = \emptyset$ then $W \leftarrow W \cup \{i\}$

Zahlungen:

4. For each $i \in W$ do
5. finde kleinsten Index j so dass: $S_i^t \cap S_j^t \neq \emptyset$ und für jedes $k < j, k \neq i$ gilt $S_k^t \cap S_j^t = \emptyset$
6. Wenn j existitert, setze $p_i = \frac{v_j^t}{\sqrt{|S_j^t|/|S_i^t|}}$.

Beispiel

Smartphone	Headset	Ladekabel		Mary	Jack	John
x				50	0	0
	x			0	0	0
		x		0	0	0
x	x			50	60	0
x		x		50	0	65
	x	x		0	0	0
x	x	x		50	60	65

Beispiel

Sortierung:

	S_i^t	v_i^t	$v_i^t/\sqrt{\lvert S_i^t\rvert}$
1. Mary	Smartphone	50	50
2. Jack	Smartphone, Ladekabel	65	45.96...
3. John	Smartphone, Headset	60	42.42...

Algorithmus wählt W und p_i :

- 1. Mary: $W = \emptyset$, so $W = \{1\}$
- 2. Jack: $S_1^t \cap S_2^t = \{\text{Smartphone}\}$
- 3. John: $S_1^t \cap S_3^t = \{\text{Smartphone}\}$
- Sieger ist Mary

- Erster Spieler blockiert durch Mary, der in W sein könnte, ist Jack (2)
- Zahlungen: $p_1 = v_2^t/\sqrt{|S_2^t|/|S_1^t|} = 65/\sqrt{2/1} = 45.96\ldots$

Anreizkompatibilität

Satz

Der Greedy-Mechanismus ist anreizkompatibel und berechnet eine $\sqrt{m}$-Approximation für das Allokationsproblem.

Beweis:

Wir betrachten zuerst Anreizkompatibilität.

Lemma

Ein Mechanismus für single-minded Spieler mit $p_i = 0$ wenn $i \notin W$ ist anreizkompatibel genau dann wenn für jeden Spieler i und alle festen anderen Gebote (S^t_{-i}, v^t_{-i}) gilt:

- *Monotonie: Wenn Spieler i mit (S^t_i, v^t_i) gewinnt, dann gewinnt er auch mit jedem $v'_i > v^t_i$ und $S'_i \subset S^t_i$.*
- *Zweitpreis-Zahlung: Ein Spieler zahlt den kleinsten Wert, den er sagen muss um zu gewinnen – das Infimum aller Werte v'_i so dass (S^t_i, v_i) noch gewinnt.*

Greedy ist anreizkompatibel

Gilt das für Greedy?

- Anheben von v_i^t oder Verkleinern von S_i^t erhöht $v_i^t / \sqrt{|S_i^t|}$
- i bewegt sich nach vorne in der Ordnung, wird bzw. bleibt Sieger
- Damit ist Monotonie erfüllt.

- Zahlung ist der Wert an der Grenze zwischen i und j:

$$\frac{x}{\sqrt{|S_i^t|}} \leq \frac{v_j^t}{\sqrt{|S_j^t|}} \quad \Rightarrow \quad x \leq v_j^t \frac{\sqrt{|S_i^t|}}{\sqrt{|S_j^t|}} = \frac{v_j^t}{\sqrt{|S_j^t|/|S_i^t|}}$$

- Greedy-Zahlung ist Zweitpreis-Zahlung.

Beweis des Lemmas (Wenn-Teil)

Beobachtungen

- Ehrlicher Spieler hat immer positiven Nutzen
- Spieler hat (S, v) und lügt $(S', v') \neq (S, v)$
- Wenn (S', v') ein Verlierergebot, dann kann (S, v) nur helfen.
- Wenn $S \not\subseteq S'$, dann kann (S, v') nur helfen.

Annahme: (S', v') ist Siegergebot und $S \subseteq S'$.

Sieger hat immer besten Nutzen mit (S, v):

- Zahlungen p' für (S', v') und p für (S, v').
- Wenn (S, x) mit $x < p$ verliert, dann (monoton) verliert (S', x).
- Daher gilt für Zweitpreis-Zahlungen $p' \geq p$.
- (S, v') erzeugt höchstens Zahlungen von (S', v').
  Das Gebot gewinnt nur öfter als (S', v').

Beweis des Lemmas (Wenn-Teil)

Wenn der Spieler seine echte Menge S mitteilt, dann folgt ehrliches Bieten des Wertes v wie bei der Zweitpreis-Auktion:

- Annahme: (S, v') gewinnt und auch (S, v)
- Zweitpreis-Zahlung p für (S, v)
- Für $v' > p$ gleiche Zahlung, für $v' < p$ verloren $\Rightarrow$ Anreizkompatibel

- Annahme: (S, v') gewinnt und (S, v) verliert
- v kleiner als Zweitpreis-Zahlung, negativer Nutzen für (S, v')

$\square$(Lemma, Wenn-Teil)

Approximation des Sozialen Nutzens

Greedy liefert eine $\sqrt{m}$-Approximation:

- Sei W^* die optimale Menge der Sieger, und W die Greedy-Menge.
- Für jeden $i \in W$ sei $W_i^* = \{j \in W^*, j \geq i \mid S_j^t \cap S_i^t \neq \emptyset\}$.
- Jedes $j \in W^*$ kommt in mindestens einem W_i^* vor, also

$$\sum_{i \in W^*} v_i^t \quad \leq \quad \sum_{i \in W} \sum_{j \in W_i^*} v_j^t \quad .$$

- Behauptung: $\displaystyle\sum_{j \in W_i^*} v_j^t \quad \leq \quad v_i^t \sqrt{m}$.

Damit:

$$\sum_{i \in W^*} v_i^t \leq \sum_{i \in W} v_i^t \cdot \sqrt{m} \qquad \text{und} \qquad \sum_{i \in W} v_i^t \geq \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \sum_{i \in W^*} v_i^t$$

Dies ist ein einfacher Umrechnungstrick: Der Wert von S^*, den Greedy verliert durch Hinzufügen von i zu W, ist maximal um Faktor $\sqrt{m}$ größer als der Wert, den Greedy erzielt durch Hinzufügen von i zu W.

Beweis der Behauptung

Für jedes $j \in W_i^*$ gilt $j \geq i$, und daher mit der Sortierung

$$\frac{v_j^t}{\sqrt{|S_j^t|}} \leq \frac{v_i^t}{\sqrt{|S_i^t|}} \quad \Rightarrow \quad v_j^t \leq \frac{v_i^t \sqrt{|S_j^t|}}{\sqrt{|S_i^t|}} \ .$$

Summieren über alle $j \in W_i^*$ ergibt

$$\sum_{j \in W_i^*} v_j^t \leq \frac{v_i^t}{\sqrt{|S_i^t|}} \sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j^t|} \ .$$

Die folgende Cauchy-Schwartz-Ungleichung

$$\left(\sum_{j \in W_i^*} 1 \cdot \sqrt{|S_j^t|} \right)^2 \leq \left(\sum_{j \in W_i^*} 1^2 \right) \cdot \left(\sum_{j \in W_i^*} \left(\sqrt{|S_j^t|} \right)^2 \right)$$

liefert eine Schranke auf den letzten Term:

$$\sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j^t|} \leq \sqrt{|W_i^*|} \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j^t|} \ .$$

Beweis der Behauptung

Kombination der beiden bisherigen Schranken:

$$\sum_{j \in W_i^*} v_j^t \leq \frac{v_i^t}{\sqrt{|S_i^t|}} \sqrt{|W_i^*|} \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j^t|} \ .$$

- Jedes S_j^t schneidet S_i^t für $j \in W_i^*$.
- W^* ist Allokation, daher $S_j^t \cap S_k^t = \emptyset$ für $j, k \in W_i^*$.
- Das bedeutet $|W_i^*| \leq |S_i^t|$.
- W^* ist Allokation, daher $\sum_{j \in W^*} |S_j^t| \leq m$.

Das ergibt

$$\sum_{j \in W_i^*} v_j^t \leq v_i^t \sqrt{\sum_{j \in W^*} |S_j^t|} \leq v_i^t \sqrt{m}$$

und damit die Behauptung und die Schranke auf den Approximationsfaktor. Damit folgt der Satz für Greedy. $\square$

Optimale Lösung des Allokationsproblems

Spezialfälle:

Matching: Jeder Spieler möchte höchstens 2 Güter, $|S_i^*| \leq 2$
Kann in polynomieller Zeit gelöst werden mit Algorithmen für gewichtetes (nicht-bipartites) Matching

Intervalle: Güter können sortiert werden auf der Linie. Jedes S_i^* beinhaltet genau die Güter eines Teilintervalls der Linie.
Kann in polynomieller Zeit gelöst werden durch dynamische Programmierung

Heuristiken:
Viele Heuristiken existieren, um das zugehörige ganzzahlige lineare Programm zu lösen. Instanzen mit 10000en Gütern erweisen sich oft als "lösbar in der Praxis".

Literatur

- Myerson. Optimal Auction Design. Mathematics of Operations Research 6(1):58–83, 1981.
- Bulow, Klemperer. Auctions versus Negotiations. American Economic Review 86(1):180–194, 1996.
- Kirkegaard. A Short Proof of the Bulow-Klemperer Auctions vs. Negotiations Result. Economic Theory 28(2):449–452, 2006.
- Lehmann, O'Callaghan, Shoham. Truth revelation in approximately efficient combinatorial auctions. Journal of the ACM 49(5):577–602, 2002.
- Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani. Algorithmic Game Theory, 2007. (Kapitel 9 und 11)
- Roughgarden. Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory, 2016. (Kapitel 3, 5 und 6)