Netzwerkverbindungsspiele

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2017

Local Connection Spiel

Computer (oder autonome Systeme) sind die Spieler (Knoten). Sie bauen ein Computer-Netzwerk, indem die Spieler sich durch Verbindungen (Kanten) an manche anderen Spieler anschliessen. Die Kanten dürfen dann von jedem Spieler benutzt werden.

das Modell:

- n Knoten sind die Spieler
- jede Strategie vom Knoten u entspricht einer Menge von ungerichteten Kanten zwischen u und anderen Knoten
- Die Strategien aller Spieler (ein Strategieprofil $\vec{s}$) definieren somit einen Graphen $G(\vec{s})$ über den Knoten mit all den Kanten in den Strategien.

Die Kosten der Spieler

(Statt mit Gewinnen, rechnen wir mit den Kosten der Spieler.)

Ziel: Die Spieler wollen die (Bau-)Kosten ihrer Kanten, *plus* die durchschnittliche Distanz zu anderen Spieler klein halten.

Kosten vom Spieler u

- n_u $\rightarrow$ die Anzahl der Kanten in Strategie s_u
- $dist(u, v)$ $\rightarrow$ kürzeste Weglänge von u nach v in $G(\vec{s})$
- Baukosten von u: $\alpha \cdot n_u$
- Distanz-Kosten von u: $\sum_{v \neq u} dist(u, v)$

Strategieprofile in Nash-Gleichgewicht

<u>Beobachtung 0:</u> In einem Nash-Gleichgewicht gehört jede Kante $\{u, v\}$ genau einer der Strategien s_u oder s_v, und $G(\vec{s})$ ist zusammenhängend. (diese werden im Folgenden angenommen)

<u>Beobachtung 1:</u> Für $\alpha \geq 1$ entspricht jeder Sterngraph $G(\vec{s})$ einem Nash-Gleichgewicht.
(Es gibt auch andere $G(\vec{s})$ Graphen in N-G.)

<u>Beobachtung 2:</u> Für $\alpha \leq 1$ entspricht der vollständige Graph einem Nash-Gleichgewicht.

(Es gibt *keine* anderen Graphen in N-G für $\alpha < 1$.)

Verschiedene Strategieprofile $\vec{s}$ erzeugen denselben Graphen!

Strategieprofile mit optimalen Kosten

Die *sozialen Kosten* sind die Gesamtkosten der Spieler:

$$\sum_{u \neq v} 2 \cdot \mathrm{dist}(u, v) + \alpha \cdot |E|$$

(Angenommen) wir wollen die sozialen Kosten minimieren.

<u>Beobachtung 3:</u> Für $\alpha \geq 2$ hat jeder Sterngraph $G(\vec{s})$ optimale soziale Kosten; wenn $\alpha \leq 2$, dann hat der vollständige Graph optimale Kosten.

Preis der Anarchie (PoA) und Stabilität (PoS) im Local-Connection Spiel

Wenn $\alpha < 1$, dann gilt $PoS = 1$, und $PoA = 1$ (Warum?)

Wenn $\alpha \geq 2$, dann gilt $PoS = 1$.

Für jedes α gilt $PoS \leq 4/3$

[– $PoA = \mathcal{O}(1)$, wenn $\alpha = \mathcal{O}(\sqrt{n})$;
– $PoA = \mathcal{O}(\sqrt{\alpha})$
(ohne Beweis)]

Global-Connection Spiel (ein ’cost-sharing’ Spiel)

Die Bauer des Netzwerks können zu den Kosten einer beliebigen Kante beitragen, und die Kosten teilen.

<u>das Modell:</u>

- ein *gerichteter* Graph $G(V, E)$ *möglicher* Verbindungen sei gegeben;
- Kante $e \in E$ hat Kosten $c_e \geq 0$;
- es gibt k Spieler; jeder Spieler i hat einen Startknoten s_i und einen Zielknoten t_i
- jeder gerichtete Pfad P_i von s_i nach t_i ist eine mögliche Strategie für i

Die Kosten der Spieler

- ein Strategieprofil $\vec{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$ definiert das Netzwerk $G(\vec{P}) = \cup_i P_i$;
- die Kosten c_e der Kante e werden aufgeteilt unter denen die e benutzen; die Kosten für i sind somit

  $$\mathrm{cost}_i(\vec{P}) = \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e}$$

  wenn k_e Spieler die Kante e in ihrem Pfad haben;
- Die sozialen Kosten sind $SC = \sum_{e \in G(\vec{P})} c_e$.

Beste-Antwort-Dynamik (B-A-D) und Potenzialfunktion

- Wir betrachten dynamische Anpassungsprozesse, in denen die Spieler *abwechselnd*, ihre Strategien gemäss beste Antwort ändern.
- Für jedes Strategieprofil $\vec{P}$ sei das Potenzial einer Kante e mit k_e Benutzern

  $$\Phi_e(\vec{P}) = c_e \cdot (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/k_e) = c_e \cdot H_{k_e},$$

  und das Potenzial des Profils $\vec{P}$ sei

  $$\Phi = \sum_{e \in E} \Phi_e$$

- Dieses Potenzial Φ sinkt in jedem Schritt um genauso viel, wie die Kosten des Spielers an der Reihe, und heisst deshalb exakte Potenzialfunktion für das Global-Connection Spiel.

Definition: Spiele mit exaktem Potenzial

Eine <u>exakte Potenzialfunktion</u> für ein *endliches* Spiel ist eine Funktion Φ, die jedem Strategieprofil $\vec{s}$ einen reellen Wert zuweist, so dass wenn sich ein Spieler gemäss einer besten Antwort seine Strategie ändert, dann stimmt die Änderung im Potenzial mit der Änderung in den Kosten dieses Spielers überein.

Spiele für die es eine solche Potenzialfunktion existiert heißen <u>Spiele mit exaktem Potenzial</u> ('potential games')

– sie haben mindestens ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien

(zB. das $\vec{s}$ wo $\Phi(\vec{s})$ minimal ist)

– Beste Antwort Dynamik 'konvergiert' immer zu einem

Nash-Gleichgewicht (endet dort)

(weil Φ nicht ewig sinken kann)

Wie schnell kommt B-A-D zu einem Nash-G.?

– B-A-D entspricht einem Algorithmus mit *lokaler Suche* der von Strategieprofil zum Nachbar-Strategieprofil wandert, und eine lokale Minimumstelle von $\Phi(\vec{s})$ sucht (eine lokale Minimumstelle ist ein Nash-G.).

– Die Nachbarn eines $\vec{s} = (s_1 \dots s_i \dots s_k)$ sind die $\vec{s}' = (s_1 \dots s_i' \dots s_k)$ bei denen irgendein Spieler *i* seine Strategie wechselt.

– Das Finden eines NG. ist ein sog. PLS-vollständiges Problem.

(Wenn NG. immer in polynomialzeit lösbar wäre, dann wären *alle* lokale Suchprobleme auch schnell lösbar.)

ACHTUNG!
Die Suche nach Nash-G. in *reinen* Strategien ist polynomiell *in der größe der Spieltabelle*; aber im Allg. ist die Eingabe nicht die Spieltabelle (die Normalform), die waere für viele Spieler zu groß!!

Global Connection Spiele: PoA und PoS

– $PoA = k$

(für $PoA \geq k$ haben wir zwei Knoten und zwei parallele Kanten, mit Kosten 1, bzw. k)

– $PoS = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/k = H_k$

für $PoS \leq H_k$ wenden wir die Potezialfunktion-Methode an, wir benutzen dass

$$\mathrm{Kosten}(\vec{P}) \leq \Phi(\vec{P}) \leq H_k \cdot \mathrm{Kosten}(\vec{P})$$

(für $PoS \geq H_k$ siehe Beispiel aus der Vorlesung)