

Mechanismen als Spiele

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2017

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Preis der Anarchie

Ansteigende Auktionen und Walras-Gleichgewicht

Modell

Wir modellieren die Zuweisung von Werbeslots auf einer Seite mit Suchresultaten.

- ▶ n Werbekunden/Spieler, Spieler i hat **Bewertung** $v_i \geq 0$ pro Click
- ▶ n Werbeslots auf der Seite (falls weniger: unsichtbare Dummy-Slots)
- ▶ Slot j hat **Clickrate** $\alpha_j \geq 0$
- ▶ Spieler i hat **Relevanz** $\gamma_i \geq 0$ zum Suchbegriff
- ▶ Wenn Spieler i 's Anzeige in Slot j erscheint, erhält er $\alpha_j \cdot \gamma_i$ Clicks.

Mechanismus sammelt Gebote b_i ein, weist Werbeanzeigen auf Slots zu, setzt Zahlungen p_i pro Click.

Nutzen von Spieler i wenn er Slot j erhält

$$\alpha_j \cdot \gamma_i \cdot (v_i - p_i) .$$

Wir **nehmen an** $\gamma_i = 1$, gleiche Resultate im allgemeinen Fall!

VCG für Sponsored Search

Als Beispiel betrachten wir zuerst den VCG-Mechanismus in diesem Szenario.

- ▶ VCG maximiert sozialen Nutzen: $\sum_{i=1}^n \alpha_j b_i$ mit Spieler i in Slot j_i .
- ▶ Ordne Spieler: $b_1 \geq \dots \geq b_n$, ordne Slots: $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$
- ▶ Austausch-Argument: Sozialer Nutzen maximal bei $j_i = i$.
- ▶ VCG-Zahlungen mit Clarke-Regel:

$$\begin{aligned} \alpha_i p_i &= h_i(b_{-i}) - \sum_{j \neq i} \alpha_j b_j = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j b_j + \sum_{j=i}^{n-1} \alpha_j b_{j+1} - \sum_{j \neq i} \alpha_j b_j \\ &= \sum_{j=i+1}^n b_j (\alpha_{j-1} - \alpha_j) = b_{i+1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) + \alpha_{i+1} p_{i+1} \end{aligned}$$

- ▶ Einsetzen ergibt Nutzen von Spieler i als $\alpha_i(v_i - b_{i+1}) - \alpha_{i+1}(b_{i+1} - p_{i+1})$.

Generalized-Second-Price Auktion

VCG hat viele gute Eigenschaften, es ist IC und kann sehr schnell berechnet werden. Dennoch wird VCG heute von keiner großen Suchmaschine benutzt.

Stattdessen nutzen alle Varianten des folgenden Schemas, bekannt als die **Generalized-Second-Price Auktion (GSP)**:

- ▶ Allokation maximiert sozialen Nutzen, i.e., Spieler i bekommt Slot i .
- ▶ Zahlung von Spieler i ist nächsthöheres Gebot b_{i+1} . Hier sei $b_{n+1} = 0$.
- ▶ Nutzen von Spieler i in GSP ist $\alpha_i(v_i - b_{i+1})$.

Beachte: Für die gleiche Menge an Geboten setzt GSP höhere Zahlungen:

$$\sum_{j=i+1}^n b_j(\alpha_{j-1} - \alpha_j) \leq b_{i+1} \sum_{j=i+1}^n (\alpha_{j-1} - \alpha_j) \leq \alpha_i b_{i+1} .$$

Allerdings ist unklar, ob die Spieler gleiche Gebote bei VCG und GSP abgeben.

GSP ist nicht anreizkompatibel

Es stellt sich heraus, dass GSP **nicht anreizkompatibel** ist!

Betrachte folgendes Beispiel:

- ▶ Wir haben 3 Spieler und 3 Slots.
- ▶ Bewertungen: $v_1 = 10$, $v_2 = 4$, $v_3 = 2$
- ▶ Clickraten: $\alpha_1 = 200$, $\alpha_2 = 199$, $\alpha_3 = 0$
- ▶ Wenn alle Spieler ehrlich sind $b_i = v_i$, dann bekommt Spieler 1 den ersten Slot, zweithöchstes Gebot ist 4. Sein Nutzen: $200 \cdot (10 - 4) = 1200$.
- ▶ Wenn Spieler 1 nun $b_i = 3$ sagt, dann bekommt er den zweiten Slot, dritthöchstes Gebot ist 2. Sein Nutzen: $199 \cdot (10 - 2) = 1592$.

Wie können wir die resultierenden Zuweisungen und Anreize von GSP erfassen?

Ergibt GSP gute Zuweisungen obwohl es mit unehrlichen Geboten arbeitet?

Entwurf von Mechanismen als strategisches Spiel

Jeder anreizkompatible oder nicht-anreizkompatible Mechanismus induziert ein strategisches Spiel unter den Spielern. Das Spiel für GSP ist gegeben wie folgt.

- ▶ n Spieler, Strategieraum $\Sigma_i = [0, \infty)$
- ▶ Spieler i wählt Strategie $b_i \in \Sigma_i$, Zustand b des Spiels
- ▶ Nummeriere Spieler $v_1 \geq \dots \geq v_n$ bzgl. Wert (nicht Gebot)
- ▶ Sei π Ordnung bzgl. Gebot. $\pi(j) = i$ wenn i das j -größte Gebot hat.
- ▶ Nutzen von Spieler i :

$$u_i(b) = \alpha_j(v_i - b_{\pi(j+1)}) \quad \text{wobei } j \text{ mit } \pi(j) = i.$$

Ein Mechanismus ist anreizkompatibel genau dann wenn $b_i = v_i$ eine schwach dominante Strategie im Spiel ist. Wie oben gezeigt hat das GSP-Spiel diese Eigenschaft nicht immer.

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Anstatt IC betrachten wir hier (ex-post) Nash-Gleichgewichte des GSP-Spiels. Ein reines NG ist ein Zustand b in dem kein Spieler unilateral zu einem anderen Gebot $b'_i \neq b_i$ abweichen möchte (nachdem Auktion mit b stattgefunden hat).

Wir stellen zuerst fest, dass es sich nicht lohnt, ein Gebot $b_i > v_i$ abzugeben.

Lemma

Für jedes $b_i \geq v_i$ und jedes b_{-i} gilt $u_i(b_i, b_{-i}) \leq u_i(v_i, b_{-i})$.

Beweis:

- ▶ Spieler i bei Position j in beiden Zuständen (b_i, b_{-i}) und $(v_i, b_{-i}) \Rightarrow$ Gleicher Nutzen.
- ▶ Ansonsten hebt ihn $b_i > v_i$ auf Position $k < j$ in (b_i, b_{-i}) , und er schiebt Spieler $\pi(k)$ runter zu Slot $k + 1$.
- ▶ Neue Zahlung wird $b_{\pi(k)} \geq v_i$ und sein Nutzen wird

$$\alpha_k(v_i - b_{\pi(k)}) \leq 0 \leq \alpha_j(v_i - b_{\pi(j+1)}) \quad \square$$

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Satz (Edelman, Ostrovsky, Schwarz 2007)

Das GSP-Spiel hat ein reines Nash-Gleichgewicht mit maximalem sozialen Nutzen. Der Preis der Stabilität für reine Nash-Gleichgewichte ist 1.

Beweisidee:

Die Gebote im Nash-Gleichgewicht sind rekursiv gegeben durch

$$b_n = v_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\right) \quad \text{und} \quad b_i = v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}(v_i - b_{i+1}) .$$

Wir zeigen nur, dass die resultierende Zuweisung den sozialen Nutzen maximiert, d.h. Gebote sind geordnet wie Bewertungen: $b_i \geq b_{i+1}$, $\forall i = 1, \dots, n-1$.

Dazu stellen wir erst fest, dass $b_n \leq v_n$. Wenn $b_{i+1} \leq v_{i+1}$, dann $b_{i+1} \leq v_i$ und

$$b_i = v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}(v_i - b_{i+1}) \leq v_i .$$

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Daher gilt mit Induktion, dass $v_i \geq b_i$ für jeden i , und somit $v_i \geq v_{i+1} \geq b_{i+1}$. Das bedeutet

$$\begin{aligned} v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \cdot v_i &\geq b_{i+1} - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \cdot b_{i+1} \\ \Rightarrow b_i = v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} (v_i - b_{i+1}) &\geq b_{i+1} \end{aligned}$$

und zeigt, dass die Zuweisung optimal ist. □

Wir wissen also, dass das beste reine Nash-Gleichgewicht optimal ist. Wenn die Spieler nicht überbieten, dann ist sogar das schlechteste reine Nash-Gleichgewicht nicht schlecht.

Satz (Paes Leme, Tardos 2010)

Im GSP-Spiel ist der Preis der Anarchie für reine Nash-Gleichgewichte ohne Überbieten höchstens 2.

Preis der Anarchie für GSP

Lemma

Für jeden Vektor von Bewertungen v , Clickraten α und Ordnung π im Nash-Gleichgewicht, sowie für jedes $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i} + \frac{v_{\pi(i)}}{v_{\pi(j)}} \geq 1. \quad (1)$$

Damit gilt entweder $\alpha_j/\alpha_i \geq 1/2$ oder $v_{\pi(i)}/v_{\pi(j)} \geq 1/2$.

Beweis:

Wenn $j \leq i$, dann $\alpha_j/\alpha_i \geq 1$. Sonst, da b ein NG, will Bieter $\pi(j)$ in Slot j nicht zu Slot $i < j$ wechseln:

$$\alpha_j(v_{\pi(j)} - b_{\pi(j+1)}) \geq \alpha_i(v_{\pi(j)} - b_{\pi(i)}).$$

Wir nutzen $b_{\pi(j+1)} \geq 0$ und kein-Überbieten $v_i \geq b_{\pi(i)}$, um die linke Seite noch größer und die rechte Seite noch kleiner zu machen:

$$\alpha_j v_{\pi(j)} \geq \alpha_i (v_{\pi(j)} - v_{\pi(i)}).$$

Teile beide Seiten durch $\alpha_i v_{\pi(j)}$, und das Lemma folgt. □ (Lemma)

Preis der Anarchie für GSP

Das Lemma spielt eine entscheidende Rolle im Beweis des Satzes. Wir nennen eine Ordnung π **schwach gültig** wenn damit die Bedingung (1) gilt. Das Lemma besagt, jede Ordnung π im Nash-Gleichgewicht ist schwach gültig.

Beweis des Satzes:

Wir zeigen die Schranke 2 für jeden Zustand, der eine schwach gültige Ordnung π erzeugt. Wir nutzen Induktion über die Anzahl der Spieler.

- ▶ $n = 1$, trivial erfüllt.
- ▶ Wir nehmen an der Preis der Anarchie ist 2 wenn π schwach gültig für $n - 1$ Spieler. Nun betrachten wir n Spieler. Sei π is schwach gültig.
- ▶ Sei $j = \pi(1)$ Spieler im ersten Slot und $i = \pi^{-1}(1)$ Slot des Spielers mit maximaler Bewertung.
- ▶ Wenn $j = i = 1$, lösche Spieler 1 und Slot 1. Die reduzierte Ordnung π bleibt schwach gültig für die verbleibenden $n - 1$ Spieler und Slots. Mit der Induktionsannahme beschränken wir den sozialen Nutzen:

$$\alpha_1 v_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k v_{\pi(k)} \geq \alpha_1 v_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k .$$

Preis der Anarchie für GSP

- ▶ Für allgemeines i und j nutzen wir deren Definition. Die Bedingung (1) sagt uns, dass entweder $\alpha_i/\alpha_1 \geq 1/2$ oder $v_j/v_1 \geq 1/2$. Wir betrachten den ersten Fall.
- ▶ Lösche Slot i und Spieler 1. π bleibt schwach gültig für die verbleibenden $n - 1$ Spieler und Slots, also

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} \alpha_k v_{\pi(k)} &\geq \frac{1}{2} (\alpha_1 v_2 + \dots + \alpha_{i-1} v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n) \\ &\geq \frac{1}{2} (\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k \end{aligned}$$

und mit der Bedingung (erster Fall)

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k v_{\pi(k)} = \alpha_i v_1 + \sum_{k \neq i} \alpha_k v_{\pi(k)} \geq \frac{1}{2} \alpha_1 v_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k .$$

Preis der Anarchie für GSP

- Im zweiten Fall löschen wir Slot 1 und Spieler j . π bleibt schwach gültig für die $n - 1$ verbleibenden Spieler und Slots, also

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_{\pi(k)} &\geq \frac{1}{2} (\alpha_2 v_1 + \dots + \alpha_j v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_n v_n) \\ &\geq \frac{1}{2} (\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_j v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k \end{aligned}$$

und mit der Bedingung (zweiter Fall)

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k v_{\pi(k)} = \alpha_1 v_j + \sum_{k=2}^n \alpha_k v_{\pi(k)} \geq \frac{1}{2} \alpha_1 v_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \alpha_k v_k .$$

□(Satz)

Gemischte Nash-Gleichgewichte für GSP

Betrachte ein gemischtes Nash-Gleichgewicht, in dem jeder Spieler eine **gemischte Strategie** wählt, d.h. eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\Sigma_i = [0, \infty)$. Wir nehmen an, die Spieler überbieten nicht, d.h. $\Pr[b_i \leq v_i] = 1$.

Die Zuweisung, die sich aus π ergibt, ist nun eine Zufallsvariable. Wir nutzen $\sigma = \pi^{-1}$, also ist $\sigma(i)$ die **Position von Spieler i in π** .

Satz (Paes Leme, Tardos 2010)

Im GSP-Spiel ist der Preis der Anarchie für gemischte Nash-Gleichgewichte ohne Überbieten höchstens 4.

Der Beweis nutzt wieder ein technisches Lemma.

Lemma

Wenn ein zufälliger Zustand b im GSP-Spiel verteilt ist gemäß eines gemischten Nash-Gleichgewichts ohne Überbieten, dann gilt

$$\frac{\mathbb{E}[\alpha_{\sigma(i)}]}{\alpha_i} + \frac{\mathbb{E}[v_{\pi(i)}]}{v_i} \geq \frac{1}{2} .$$

High Scores

Die besten Schranken an den Preis der Anarchie finden sich bei [Caragiannis, Kaklamanis, Kanellopoulos, Kyropoulou, Lucier, Paes Leme, Tardos 2012]:

- ▶ Reine NG: ≤ 1.282
- ▶ Reine NG: ≥ 1.259
- ▶ Gemischte NG, Grob-Korrelierte Ggw: ≤ 2.310
- ▶ Bayes'sche grob-korlierte Ggw: ≤ 2.927
(Spiele mit unvollständiger Information)

Obwohl die Gebote manipuliert und nicht ehrlich sein können, **liefert GSP im worst-case gute Zuweisungen**, selbst für Stabilitätskonzepte mit relativ schwachen Anforderungen wie grob-korlierte Gleichgewichte, und sogar ex-ante in Spielen mit unvollständiger Information.

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Preis der Anarchie

Ansteigende Auktionen und Walras-Gleichgewicht

Erstpreisauktion

In der Praxis werden auch Mechanismen genutzt, die nicht anreizkompatibel sind. Um die Güte von solchen Systemen zu beschreiben, betrachten wir Gleichgewichtskonzepte und den Preis der Anarchie.

Die *Erstpreisauktion* ist eine Ein-Gut-Auktion, in der der höchste Bieter das Gut erhält. Er zahlt sein Gebot, alle anderen Spieler zahlen nichts.

Erstpreisauktion als Spiel

- ▶ n Spieler, Strategieraum $\Sigma_i = [0, \infty)$, Strategie $b_i \in \Sigma_i$
- ▶ Ergebnismenge $A = \{1, \dots, n\}$, Zuweisungsfunktion $f(b) = \arg \max_i b_i$
- ▶ Bewertung: $v_i(i) = v_i \geq 0$ und $v_i(j) = 0$ für $j \neq i$.
- ▶ Ordnung der Spieler: $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$
- ▶ Zahlung: $p_i(b) = b_i$ wenn $f(b) = i$ und 0 sonst.
- ▶ Nutzen: $u_i(b) = v_i(f(b)) - p_i(b)$
- ▶ Spieler i wählt Gebot strategisch um seinen Nutzen zu maximieren.

Gleichgewichte in der Erstpreisauktion

Proposition

Der Preis der Anarchie für reine Gleichgewichte in der Erstpreisauktion ist 1.

Beweis:

Sei b ein reines Nash-Gleichgewicht. Wir definieren eine Abweichung $b'_1 = \sum_i p_i(b)$ für Spieler 1 und $b'_i = 0$ für Spieler $i \geq 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u_1(b) &\geq u_1(b'_1, b_{-1}) = v_1 - \sum_i p_i(b) = 0 \\ u_i(b) &\geq u_i(0, b_{-i}) = 0 \end{aligned} \quad \text{für alle } i \geq 2.$$

Sei $\text{Opt}(v) = \max_a \sum_j v_j(a) = v_1$ der maximale soziale Nutzen, der erreicht wird, wenn der Spieler mit bestem Wert das Gut erhält. Damit gilt

$$\sum_i u_i(b'_i, b_{-i}) \geq \text{Opt}(v) - \sum_i p_i(b) \quad (2)$$

Gleichgewichte in der Erstpreisauktion

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\sum_i v_i(f(b)) &= \sum_i u_i(b) + p_i(b) \\ &\geq \sum_i u_i(b'_i, b_{-i}) + p_i(b) \\ &\geq \text{Opt}(v) - \sum_i p_i(b) + \sum_i p_i(b) \\ &= \text{Opt}(v) .\end{aligned}$$



In der Erstpreisauktion existieren evtl. keine reinen Nash-Gleichgewichte. Wie können wir den Preis der Anarchie für allgemeinere Gleichgewichtskonzepte bestimmen, z.B. für gemischte oder korrelierte Gleichgewichte?

Gleichgewichte in der Erstpreisauktion

Proposition

Der Preis der Anarchie für grob-korrelierte Gleichgewichte in der Erstpreisauktion maximal 2.

Beweis:

Sei \mathcal{V} ein grob-korreliertes Gleichgewicht, d.h. \mathcal{V} ist eine Verteilung über Zustände, so dass kein Spieler i zu einer einzigen Strategie b'_i abweichen will.

Wir betrachten so eine Abweichung: $b'_1 = v_1/2$ und $b'_i = 0$ sonst.

Dann gilt natürlich $\mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}}[u_i(b)] \geq \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}}[u_i(0, b_{-i})] = 0$ für $i \geq 2$.

Wenn Spieler 1 das Gut nicht gewinnt, dann bietet und zahlt ein anderer Spieler j mehr als $v_1/2$, also $u_1(b'_1, b_{-i}) = 0 \geq v_1/2 - p_j(b)$. Wenn Spieler 1 das Gut gewinnt, dann $u_1(b'_1, b_{-i}) = v_1/2$. Damit gilt für jeden Zustand b

$$u_1(b'_1, b_{-1}) \geq \frac{v_1}{2} - \sum_i p_i(b) .$$

Gleichgewichte in der Erstpreisauktion

Also:

$$\sum_i \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}} [u_i(b'_i, b_{-i})] \geq \frac{1}{2} \text{Opt}(v) - \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}} [p_i(b)] \quad (3)$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}} [v_i(f(b))] &= \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}} [u_i(b) + p_i(b)] \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \text{Opt}(v) - \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}} [p_i(b)] + \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}} [p_i(b)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{Opt}(v) . \quad \square \end{aligned}$$

Im beiden Fällen haben wir die Gleichgewichtseigenschaft ausgenutzt. Wir haben eine Abweichung b'_i für jeden Spieler i bestimmt. Die Kernaussagen sind (2) und (3), daraus haben wir direkt einen Preis der Anarchie von 1 und 2 abgeleitet.

Abweichung und Gleichgewichte – wovon hängt ab?

Im ersten Beweis hängt die Abweichung b'_1 von b_{-1} ab. Damit klappt das Argument **nur für reine Nash-Gleichgewichte**, denn im gemischten Gleichgewicht kann ich meine Abweichung **nicht abhängig vom Ergebnis der Randomisierung der anderen Spieler** wählen. b'_1 ist also so im gemischten Nash-Gleichgewicht nicht zulässig, daher bekommen wir dafür keine Schranke.

Im zweiten Beweis dagegen hängt keine der Abweichungen b'_i von b_i oder b_{-i} ab. Damit kann b'_i als ein mögliches “bestes Gebot im Nachhinein” angesehen werden und beschreibt somit eine mögliche Abweichung, die wir **sogar im grob-korrelierten Gleichgewicht** wählen könnten. Daher gilt die Schranke für grob-korrelierte Gleichgewichte.

Im allgemeinen Fall erlauben wir, dass die Abweichung b'_i von b_i abhängt, aber nicht von b_{-i} . Damit betrachten wir **korrelierte Gleichgewichte**. Die gleichen Argumente lassen sich (mit z.T. anderen Parametern und Schranken) für grob-korrelierte Gleichgewichte führen.

Smoothness (für korrelierte Gleichgewichte)

Betrachte einen beliebigen Mechanismus (f, p) mit **nicht-negativen Bewertungen** $v \in V$. Sei $\text{Opt}(v) = \max_b \sum_i v_i(f(b))$ der optimale soziale Nutzen im Spiel.

Definition

Ein Mechanismus (f, p) mit Bewertungen aus V ist **(λ, μ) -smooth**, wenn für jeden Zustand b ein Vektor von gemischten Strategien b' existiert, so dass

$$\sum_i \mathbb{E}_{b'_i} [u_i(b'_i, b_{-i})] \geq \lambda \cdot \text{Opt}(v) - \mu \cdot \sum_i p_i(b)$$

mit $\lambda, \mu \geq 0$. Strategie b'_i darf von v_i und b_i abhängen, aber **nicht von den Strategien b_{-i} der anderen Spieler**. Wir nennen b'_i die **Smoothness-Abweichung von i in b** .

Die Erstpreisauktion ist $(1/2, 1)$ -smooth (siehe (3)). Das erlaubt eine Beschränkung des Preises der Anarchie – sofern die Spieler den **Mechanismus verlassen können** und dann Bewertung, Zahlung und Nutzen von 0 erhalten.

Smoothness und der Preis der Anarchie

Satz (Syrgkanis, Tardos 2013)

Wenn ein Mechanismus (λ, μ) -smooth ist und die Spieler den Mechanismus verlassen können, dann ist der Preis der Anarchie für korrelierte Gleichgewichte höchstens

$$\frac{\max\{\mu, 1\}}{\lambda}$$

Beweis:

Sei \mathcal{V} das korrelierte Gleichgewicht. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}} [v_i(f(b))] &= \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}} [u_i(b) + p_i(b)] \\ &\geq \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}} [u_i(b'_i, b_{-i}) + p_i(b)] \\ &\geq \lambda \cdot \text{Opt}(v) + (1 - \mu) \cdot \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}} [p_i(b)] \end{aligned}$$

Smoothness und der Preis der Anarchie

Da ein Spieler den Mechanismus verlassen kann, gilt $\mathbb{E}_{b \sim \nu} [u_i(b)] \geq 0$, und damit

$$\mathbb{E}_{b \sim \nu} [v_i(f(b))] \geq \mathbb{E}_{b \sim \nu} [p_i(b)] \geq 0 .$$

Somit

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \text{Opt}(\nu) &\leq \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \nu} [v_i(f(b))] - (1 - \mu) \cdot \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \nu} [p_i(b)] \\ &\leq \max\{1, \mu\} \cdot \sum_i \mathbb{E}_{b \sim \nu} [v_i(f(b))] . \end{aligned}$$



Kombinatorische Auktionen mit Gut-Geboten

Wir betrachten kombinatorische Auktionen mit simultanen Gut-Geboten.

Kombinatorische Auktion

- ▶ m Güter, n Spieler
- ▶ Spieler i hat Bewertungsfunktion $v_i(S_i) \geq 0$ für $S_i \subseteq [m]$.

Simultane Ein-Gut-Auktionen

- ▶ Jedes Gut wird mit einer separaten Ein-Gut-Auktion M_j versteigert
- ▶ Alle Ein-Gut-Auktionen M_j laufen simultan ab.
- ▶ Spieler i gibt Gebot $b_{ij} \geq 0$ in M_j ab, $j = 1, \dots, m$.
- ▶ M_j weist Gut j zu (z.B. an höchsten Bieter $\arg \max_i b_{ij}$)
- ▶ M_j bestimmt Zahlung $p_{ij}(b_j)$ für jeden Spieler i
- ▶ Spieler i erhält Güter S_i und Zahlungen $\sum_j p_{ij}(b_j)$

Bewertungsfunktionen

Wir beschränken uns auf **unit-demand** Bewertungen:

$$v_i(S_i) = \max_{j \in S_i} v_{ij}$$

mit $v_{ij} \geq 0$ für alle j .

Satz

Wenn jede Ein-Gut-Auktion (λ, μ) -smooth ist und die Spieler unit-demand Bewertungen haben, dann ist auch die kombinatorische Auktion mit simultanen Gut-Geboten (λ, μ) -smooth.

Beweis:

Betrachte S^* , die optimale Zuweisung der Güter. OBdA erhält jeder Spieler nur ein Gut in S^* . Sei $S_i^* = \{j_i^*\}$ das *beabsichtigte Gut* von i . Wir setzen nun $v_i^*(S) = \max_j v_{ij}^*$ mit $v_{ij}^* = v_{ij}$ wenn $j = j_i^* \in S$ und 0 sonst.

Komposition von Ein-Gut-Auktionen

Betrachte nun einen beliebigen Zustand b und die resultierende Allokation S . Dann gilt

$$\sum_i v_i(S_i) \geq \sum_i v_i^*(S_i) = \sum_{i:j_i^* \in S_i} v_{ij_i^*}^*$$

da wir in v_i^* nur den Wert des beabsichtigten Gutes erhalten, und auch nur wenn der Spieler das beabsichtigte Gut bekommt.

Wir konstruieren einen Vektor aus gemischten Strategien b'_i aus den Smoothness-Abweichungen b'_{ij} der Ein-Gut-Auktionen. Wir nehmen an, Spieler i hätte immer Wert v_{ij}^* wenn er an Auktion M_j teilnimmt, für jedes $j = 1, \dots, m$. Er wählt die Smoothness-Abweichung b'_{ij} , die von v_{ij}^* und b_{ij} abhängt. Wenn b'_{ij} randomisiert ist, kombiniert er die Abweichungen in den Ein-Gut-Auktionen unabhängig zu einer Smoothness-Abweichung für alle Auktionen.

Komposition von Ein-Gut-Auktionen

Sei nun X_{ij} das Event, dass Gut j an Spieler i gegeben wird, wenn i in M_j zu b'_{ij} abweicht. Dann gilt:

$$\mathbb{E}_{b'_i} [u_i(b'_i, b_{-i})] \geq \sum_j \mathbb{E}_{b'_i} [v_{ij}^* X_{ij} - p_{ij}(b'_{ij}, b_{-i,j})]$$

Summe über Spieler und unabhängige Kombination der Abweichungen ergibt:

$$\sum_i \mathbb{E}_{b'_i} [u_i(b'_i, b_{-i})] \geq \sum_j \sum_i \mathbb{E}_{b'_{ij}} [v_{ij}^* X_{ij} - p_{ij}(b'_{ij}, b_{-i,j})]$$

Der rote Term ist genau die Summe der erwarteten Nutzenfunktionen wenn alle Spieler nur in M_j teilnehmen, Gebote b_{ij} vorliegen, jeder Spieler Wert v_{ij}^* für das Gut hat und einzeln zu b'_{ij} abweicht. Damit können wir nun die Smoothness-Eigenschaft für M_j anwenden.

Komposition von Ein-Gut-Auktionen

Beachte, dass es für Gut j maximal einen Spieler mit $v_{ij}^* > 0$ gibt – den Spieler, der Gut j in S^* bekommt. Damit hat das Optimum für M_j mit Bewertungen v_{ij}^* den Wert $\sum_i v_{ij}^*$, und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \sum_i \mathbb{E}_{b'_i} [u_i(b'_i, b_{-i})] &\geq \sum_j \sum_i \mathbb{E}_{b'_j} [v_{ij}^* X_{ij} - p_{ij}(b'_j, b_{-i,j})] \\
 &\geq \sum_j \left(\lambda \sum_i v_{ij}^* - \mu \sum_i p_{ij}(b_j) \right) \\
 &= \lambda \sum_j \sum_i v_{ij}^* - \mu \sum_j \sum_i p_{ij}(b_j) \\
 &= \lambda \sum_i v_i(S_i^*) - \mu \sum_i p_i(b)
 \end{aligned}$$



Komposition von Ein-Gut Auktionen

Damit haben wir gezeigt, dass auch in kombinatorischen Auktionen mit mehreren Gütern und gleichzeitigen Erstpreisauktionen der Preis der Anarchie für korrelierte Gleichgewichte höchstens 2 ist. Durch die besondere Form der Abweichung (unabhängig von b_i) ergibt sich die Schranke sogar für grob-korrelierte Gleichgewichte.

Diese Komposition der Smoothness-Eigenschaft gilt ebenso für die deutlich größere Klasse von **fraktional subadditiven** oder **XOS Bewertungen**. So eine Bewertungsfunktion v besteht aus einer Menge K von additiven Bewertungsfunktionen $v_i^k(S) = \sum_{j \in S} v_{ij}^k$ für jedes $k \in K$. Die Bewertung einer Menge von Gütern ist dann die maximale Bewertung in einer der additiven Funktionen: $v_i(S) = \max_{k \in K} v_i^k(S)$.

XOS Bewertungen beinhalten eine ganze Reihe von interessanten und praktisch relevanten Fällen, z.B. additive, unit-demand, oder submodulare Bewertungen.

Zweitpreisauktion

Die Zweitpreisauktion ist anreizkompatibel: $b_i = v_i$ ist eine schwach dominante Strategie und somit auch ein reines Nash-Gleichgewicht (mit optimalem sozialen Nutzen). Es können aber durchaus noch weitere (schlechtere) Gleichgewichte existieren. Für die Analyse nutzen wir eine Formalisierung der Eigenschaft, dass die Spieler **nicht überbieten**.

Definition

In Mechanismus (f, p) ist die maximale **Zahlungsbereitschaft** von Spieler i für Ergebnis $a \in A$ bei Strategie b_i gegeben durch

$$z_i(b_i, a) = \max_{b_{-i}: f(b_i, b_{-i})=a} p_i(b_i, b_{-i}) .$$

Definition

Eine Verteilung \mathcal{V} über Zustände **ohne Überbieten** erfüllt

$$\mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}}[z_i(b_i, f(b))] \leq \mathbb{E}_{b \sim \mathcal{V}}[v_i(f(b))] .$$

Zweitpreisauktion und Smoothness

Die Definition von Smoothness benötigt in diesem Fall drei Parameter, wobei der dritte Parameter erst bei Mechanismen ohne Überbieten zu einer Schranke auf den Preis der Anarchie führt.

Definition

Ein Mechanismus (f, p) mit Bewertungen in V ist **schwach (λ, μ_1, μ_2) -smooth**, wenn für jeden Zustand b ein Vektor von gemischten Strategien b' existiert, so dass es $\lambda, \mu_1, \mu_2 \geq 0$ gibt mit

$$\sum_i \mathbb{E}_{b'_i} [u_i(b'_i, b_{-i})] \geq \lambda \cdot \text{Opt}(v) - \mu_1 \cdot \sum_i p_i(b) - \mu_2 \sum_i z_i(b_i, f(b)) .$$

Beachte: Jeder Mechanismus, der (λ, μ) -smooth ist, ist auch schwach $(\lambda, \mu, 0)$ -smooth – z.B. die Erstpreisauktion ist schwach $(1/2, 1, 0)$ -smooth.

Die Zweitpreisauktion ist schwach $(1, 0, 1)$ -smooth.

Preis der Anarchie für die Komposition von Zweitpreisauktionen

Satz

Wenn ein Mechanismus schwach (λ, μ_1, μ_2) -smooth ist und die Spieler den Mechanismus verlassen können, dann ist der Preis der Anarchie für korrelierte Gleichgewichte ohne Überbieten höchstens

$$\frac{\mu_2 + \max\{1, \mu_1\}}{\lambda}$$

Satz

Wenn jede Ein-Gut-Auktion schwach (λ, μ_1, μ_2) -smooth ist und die Spieler XOS Bewertungen haben, dann ist auch die kombinatorische Auktion mit simultanen Gut-Geboten schwach (λ, μ_1, μ_2) -smooth.

Betrachte kombinatorische Auktionen, in denen jedes Gut in einer separaten Zweitpreisauktion verkauft wird (z.B. wenn alle Güter einzeln bei Ebay versteigert werden). Wenn die Bieter XOS-Bewertungen haben und ein korreliertes Gleichgewicht erreichen, dann ist der Preis der Anarchie höchstens 2.

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Preis der Anarchie

Ansteigende Auktionen und Walras-Gleichgewicht

Ansteigende Auktionen

Die Zweitpreisauktion ist eine Auktion mit **direkter Offenlegung**. Oft möchten Bieter ihr wahres Gebot für das Gut aber **lieber nicht offenlegen**, insbesondere wenn sie das Gut am Ende evtl. für einen deutlich kleineren Preis erhalten.

Das ist ein Grund dafür, dass **ansteigende Auktionen** in der Praxis verbreitet sind. Dabei wird der Preis so lange um eine Schrittweite ε erhöht bis nur noch ein Bieter im Rennen ist. Dieser Bieter erhält das Gut zum Preis, zu dem der vorletzte Bieter die Auktion verlassen hat.

Die ansteigende Auktion ist eine Zweitpreisauktion ohne direkte Offenlegung. Letztlich ergeben sich die gleiche Zuweisung und (bei $\varepsilon \rightarrow 0$) auch die gleichen Zahlungen wie in der Zweitpreisauktion.



Ansteigende Auktion für mehrere Güter

Wir betrachten eine Variante für eine Menge $[m]$ von m Gütern. Die Auktion nutzt **Bedarfsqueries** an ein **Bedarfsorakel** für jeden Bieter.

Bedarfsorakel

Sei $v_i : 2^{[m]} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Bewertungsfunktion für Spieler i . Ein Bedarfsorakel beantwortet **Bedarfsqueries** der folgenden Form:

INPUT: Preis $p_j \geq 0$ für jedes Gut $j \in M$

OUTPUT: Eine Menge $S \subseteq [m]$ von Gütern, die den Nutzen von i bei Preisen p_j maximiert. Formal: Ein **Bedarf** ist eine Menge S , so dass für alle $S' \subseteq [m]$ gilt

$$v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j \geq v_i(S') - \sum_{j \in S'} p_j .$$

Diese Arten von Orakelzugriff sind **effizient** und **vorteilhaft**. Spieler müssen sich **nicht immer über die genaue Bewertung aller Teilmengen** im Klaren sein.

Ansteigende Auktion für mehrere Güter

INPUT: Menge $[m]$ von Gütern, Menge \mathcal{N} der Spieler

OUTPUT: Zuweisung (S_1, \dots, S_n) der Güter an Spieler,
ein Preis $p_j \geq 0$ für jedes Gut $j \in [m]$

Initialisierung:

1. Setze $p_j \leftarrow 0$, $\forall j \in M$ und $S_i \leftarrow 0$, $\forall i \in \mathcal{N}$

Anstieg:

2. Repeat
3. Für jedes i , sei D_i ein Bedarf von i bei Preisen p_j mit:
 p_j für $j \in S_i$ und $p_j + \epsilon$ für $j \notin S_i$
4. If $S_i = D_i$ für jedes i , then exit loop.
5. Finde Spieler i mit $S_i \neq D_i$ und aktualisiere:
6. Für jedes $j \in D_i \setminus S_i$ setze $p_j \leftarrow p_j + \epsilon$
7. $S_i \leftarrow D_i$
8. Für jedes $k \neq i$ setze $S_k \leftarrow S_k \setminus D_i$

Ausgabe:

9. return Zuweisung S_1, \dots, S_n und Preise p_1, \dots, p_m

Walras-Gleichgewicht

Wir nehmen an, dass die Bewertung $v_i(S) \geq 0$ eine ganze Zahl ist, für jeden Spieler i und jede Menge $S \subseteq [m]$.

Definition

Seien p und q zwei Preisvektoren mit $p_j \geq q_j$ für alle $j \in [m]$. Bewertung v_i eine **Substitutionsbewertung** wenn jeder Bedarf bei Preisen p alle Güter des Bedarfs bei q enthält, deren Preis gleich geblieben ist.

Formaler: Für jedes $S^q \in \arg \max\{v_i(S) - \sum_{j \in S} q_j\}$ gibt es ein $S^p \in \arg \max\{v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j\}$ mit $S^p \supseteq \{j \in S^q \mid p_j = q_j\}$.

Beispiele für Substitutionsbewertungen:

Additiv	$v_i(S) = \sum_{j \in S} v_{ij}$
Unit-Demand	$v_i(S) = \max_{j \in S} v_{ij}$
Konkav Multi-Unit	$v_i(S) = \sum_{j=1, \dots, S } v_j$ mit $v_1 \geq v_2 \geq \dots$

Definition

Ein **Walras-Gleichgewicht** besteht aus einer Zuweisung (S_1, \dots, S_n) von Gütern und einem Vektor $p = (p_1, \dots, p_m)$ von nicht-negativen Preisen, so dass S_i ein Bedarf für Spieler i ist bzgl. der Preise p . Wenn ein Gut j nicht zugewiesen wird, dann hat es Preis $p_j = 0$.

Ein Walras-Gleichgewicht hat einen Preis für jedes Gut. Jeder Spieler bekommt eine Menge von Gütern, die er bei den momentanen Preisen am liebsten haben möchte. Güter, die niemand haben will, erhalten Preis 0.

Satz

Sei v_i eine ganzzahlige Substitutionsbewertung und $\varepsilon < 1/m$. Dann ist die Ausgabe der ansteigenden Auktion ein Walras-Gleichgewicht. Die Zuweisung maximiert den sozialen Nutzen $\sum_i v_i(S_i)$.

Beweis

Wir zeigen zuerst eine **Behauptung**: Zu jeder Zeit gilt für jeden Spieler $S_i \subseteq D_i$.

Die Behauptung gilt am Anfang, betrachte Update für Spieler i . Für i selbst gilt $S_i = D_i$ am Ende des Updates. Für $k \neq i$ können zwei Änderungen auftreten:

1. Güter wurden von i aus S_k weggenommen. Dann wird S_k kleiner, kein Einfluß auf D_k , Behauptung gilt weiterhin.
2. Preise der Güter außerhalb von S_k erhöht, aber das betrifft S_k nicht. Da v_i Substitutionsbewertung gilt: Güter, die aus D_k entfernt werden, haben erhöhten Preis, aber sie liegen nicht in S_k . Behauptung gilt weiterhin.

Güter werden also nur von anderen Spielern **“gestohlen”**, kein Gut wird einfach **“weggeworfen”**. Wenn also ein Gut zum ersten Mal zugewiesen wird und sich sein Preis auf > 0 erhöht, dann bleibt es für immer zugewiesen. Es gibt es kein Gut j ,

- ▶ das zugewiesen ist und Preis $p_j = 0$ hat, oder
- ▶ das nicht zugewiesen ist und Preis $p_j > 0$ hat.

Optimalität der Zuweisung: Beweis als Übungsaufgabe. □

Strategisches Bieten

Exposure Problem für allgemeine Bewertungen:

- ▶ Komplemente: Alice hat positive Bewertung nur für beide Schuhe
- ▶ Auktion könnte einen Schuh wegnehmen und anderem Bieter geben
- ▶ Alice verlässt die Auktion, sie hat Wert 0

Bedarfsreduktion für Substitutionsbewertungen

- ▶ Walras-Gleichgewichte sind anfällig für preisantizipierende Bieter
- ▶ Bieter teilen kleinere Bedarfsmengen mit
- ▶ Preise bleiben deutlich kleiner, Nutzen ist höher als bei ehrlichem Gebot

Signalisieren in Auktionen

- ▶ Bieter nutzen Gebote, um sich gegenseitig Nachrichten zu senden
- ▶ USWest, McLeod und Lizenz #378 in Rochester

Spektrumsauktionen

Im Gegensatz zu Sponsored Search, wo Auktionen täglich millionenfach ablaufen, werden Auktionen für Spektrum in Funknetzwerken nur sehr selten und in sehr großem Umfang durchgeführt. Hierbei wird eine Menge von Frequenzspektrum (z.T. gebündelt in Kanälen) vom Staat an Telekommunikationsanbieter versteigert. Die letzten Auktionen in Deutschland waren die Versteigerungen der Lizenzen zu Frequenzen im Bereich 700-1800 MHz im August 2015¹.

Formate wie sequentielle Ein-Kanal-Auktionen (Schweiz, 2000) oder Auktionen mit versiegeltem Gebot (Neuseeland, 1990) haben zu teilweise skurrilen Ergebnissen und Preisen geführt. Dagegen haben sich simultane ansteigende Auktionen hierbei bewährt.

¹siehe auch

https://www.bundesnetzagentur.de/DE/Sachgebiete/Telekommunikation/Unternehmen_Institutionen/Frequenzen/Projekt2016_Frequenzauktion/projekt2016-node.html

Rückwärtsauktion der FCC 2016

In den USA wurde 2016 ein interessanter neuer Ansatz mit Rückwärtsauktion genutzt. Dabei wurden Frequenzbänder von Fernsehsendern zurückgekauft und dann neu gepackt an die Sender vergeben. Das erlaubt z.B. die zusammenhängende Zuweisung von Frequenzbändern und macht die resultierende Zuweisung deutlich kompakter. Das frei werdende Spektrum kann dann weiter verkauft werden z.B. an Mobilfunkanbieter.

Single-Parameter Modell

- ▶ n TV Sender, Sender i hat private Bewertung $v_i \geq 0$ für seinen Kanal
- ▶ Kanal wird nicht zurückgekauft, Nutzen $u_i = 0$. (i verliert),
- ▶ Kanal wird zurückgekauft zum Preis p , Nutzen $p - v_i$. (i gewinnt)

Rückwärtsauktion der FCC 2016

Für eine **gültige Menge** von Siegern $W \subseteq \mathcal{N}$ können die Kanäle zusammengelegt und neu gepackt werden. Ob eine Menge W gültig ist, wird durch ein Graphenfärbungsproblem entschieden, da zwei TV-Sender im gleichen Einzugsgebiet aus Interferenzgründen nicht den gleichen Kanal bekommen können. Obwohl dieses Gültigkeitsproblem i.A. NP-hart ist, wird es hier für mittelgroße Instanzen mit Ansätzen aus dem SAT-Lösen exakt gelöst.

Wie sollte die gültige Menge an Siegern in der Rückwärtsauktion gewählt werden? Für dieses Problem wurde ein Greedy Mechanismus benutzt, der sehr ähnlich ist zu dem Mechanismus, den wir für kombinatorische Auktionen mit Single-Minded Bewertungen betrachtet haben. Diesmal läuft er allerdings umgekehrt ab – Bieter werden einzeln aus der Siegermenge entfernt.

Deferred Allocation mit Scoring-Funktion

Deferred Allocation Regel:

1. Setze $W = \mathcal{N}$
2. While $\exists i \in W$ mit $W \setminus \{i\}$ gültig
3. Entferne ein solches i aus W
4. return W

Es wird ein Bieter entfernt solange die resultierende Menge noch gültig ist. Für die Wahl des Bieters kann man eine **Scoring-Funktion** benutzen (z.B. höchstes Gebot, höchstes Verhältnis zur Größe des Marktes). Wenn die Scoring-Funktion monoton im Gebot des Bieters und unabhängig von den anderen Geboten ist, dann wird der Mechanismus anreizkompatibel.

Literatur

- ▶ Edelman, Ostrovsky, Schwarz. Internet Advertising and the Generalized Second-Price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords. *American Economic Review* 97(1):242-259, 2007.
- ▶ Caragiannis, Kaklamanis, Kanellopoulos, Kyropoulou, Lucier, Paes Leme, Tardos. Bounding the Inefficiency of Outcomes in Generalized Second Price Auctions. *Journal of Economic Theory* 156:343-388, 2015.
- ▶ Syrgkanis, Tardos. Composable and Efficient Mechanisms. *STOC 2013*
- ▶ Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani. *Algorithmic Game Theory*, 2007. (Kapitel 11)
- ▶ Roughgarden. *Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory*, 2016. (Kapitel 8)