Auslastungs- und Potenzialspiele

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2017

Auslastungsspiele (Congestion Games)

Ein *Auslastungsspiel* ist ein Tupel $\Gamma = (\mathcal{N}, \mathcal{R}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{N}}, (d_r)_{r \in \mathcal{R}})$ mit

- $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, Menge der Spieler,
- $\mathcal{R} = \{1, \dots, m\}$, Menge der Ressourcen
- $\Sigma_i \subseteq 2^{\mathcal{R}}$, Strategieraum von Spieler i
- $d_r : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{Z}$, Latenz- oder Verzögerungsfunktion von Ressource r

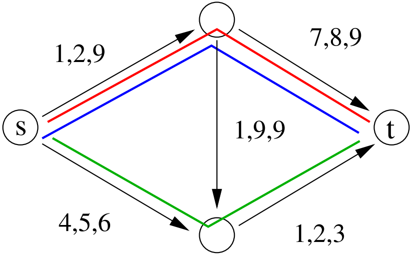
Für jeden Zustand $S = (S_1, \dots, S_n) \in \Sigma_1 \times \cdots \Sigma_n$ sei

- $n_r =$ Anzahl der Spieler mit $r \in S_i$
- $d_r(n_r) =$ Latenz oder Verzögerung der Ressource r
- $\delta_i(S) = \sum_{r \in S_i} d_r(n_r) =$ Latenz oder Verzögerung von Spieler i

Die *Kosten* von Spieler i in Zustand S sind $c_i(S) = \delta_i(S)$. Spieler wollen ihre Kosten verringern.

Beispiel: Netzwerkauslasungsspiel (Network Congestion Game)

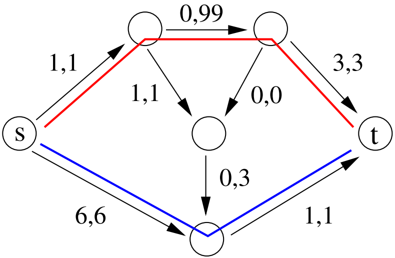
- Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, Jede Kante $e \in E$ hat eine Latenzfunktion $d_e : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}$.
- Spieler i möchte einen Weg wählen mit kleinster Latenz zwischen seinem Startknoten s_i und dem Endknoten t_i.



- In diesem Beispiel ist $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R} = E$, Σ_i = Menge der s-t-Wege.
- Dieses Spiel ist *symmetrisch*: Alle Spieler haben die gleiche Strategiemenge, und wenn wir in einem Zustand die Strategien der Spieler permutieren, dann ergeben sich die Kosten in ebenso permutierter Weise.

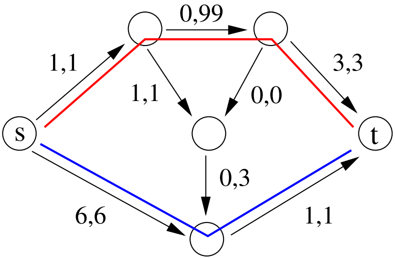
Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

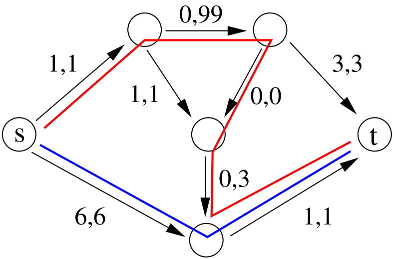
Eine Folge von (beste-Antwort) Verbesserungsschritten: Erster Schritt ...



Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

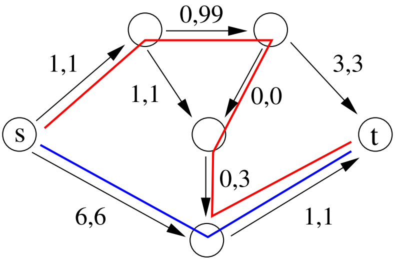
Eine Folge von (beste-Antwort) Verbesserungsschritten: Erster Schritt ...





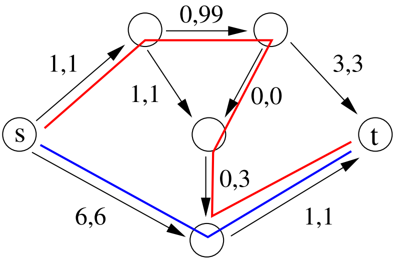
Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

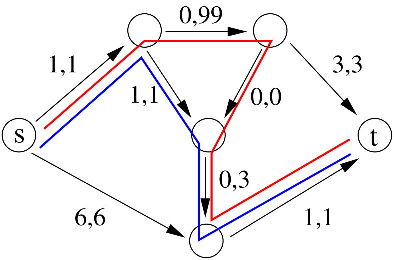
... zweiter Schritt ...



Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

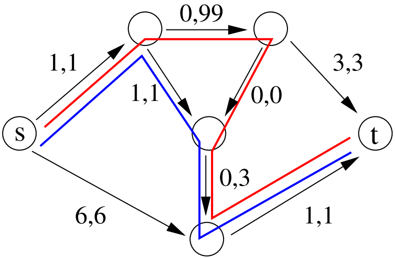
... zweiter Schritt ...





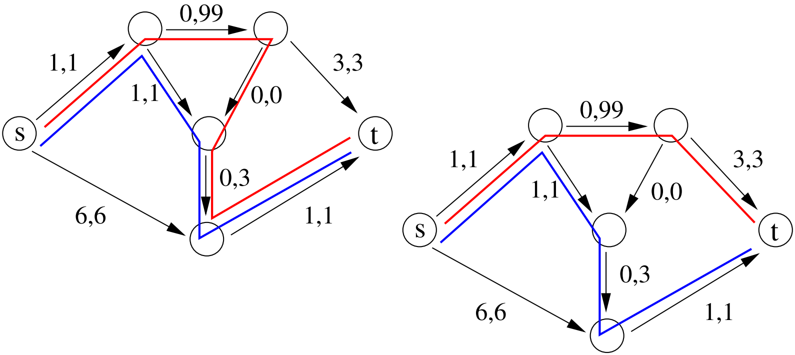
Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

... dritter Schritt ...



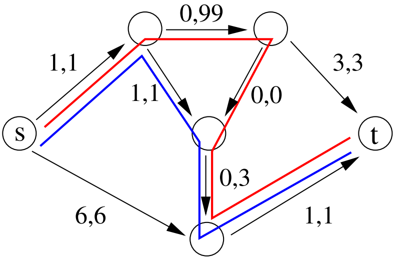
Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

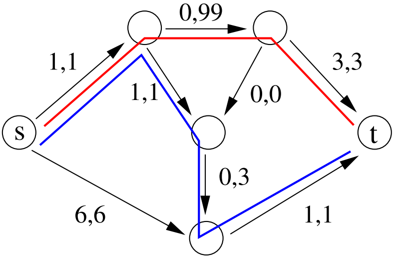
... dritter Schritt ...



Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

... dritter Schritt ...





Reines Nash-Gleichgewicht – **Stopp!**

Fragen

- Gibt es in jedem Auslastungsspiel ein reines Nash-Gleichgewicht?
- Ist jede Folge von Verbesserungsschritten endlich?
- Wieviele Schritte werden benötigt, um ein (reines) Nash-Gleichgewicht zu erreichen?

Endliche Verbesserungseigenschaft

Satz (Rosenthal 1973)

In einem Auslastungsspiel ist jede Folge von Verbesserungsschritten endlich.

Aus diesem Resultat folgt unmittelbar

Korollar

Jedes Auslastungsspiel hat ein reines Nash-Gleichgewicht.

Rosenthals Analyse basiert auf einer Potenzialfunktion.
Für jeden Zustand S sei

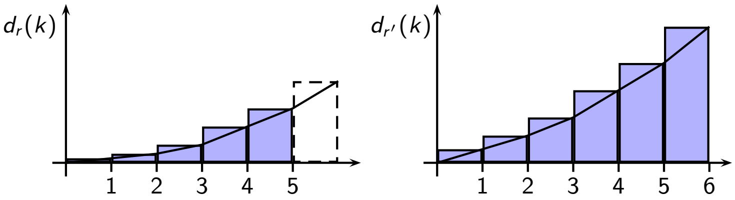
$$\Phi(S) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{k=1}^{n_r(S)} d_r(k) \quad .$$

Diese Funktion heißt *Rosenthals Potenzialfunktion*.

Satz von Rosenthal: Beweis

Lemma

Sei S ein beliebiger Zustand. Wenn wir von S zu Zustand S' wechseln mit einem Verbesserungsschritt von Spieler i, in dem seine Kosten um $\Delta > 0$ verringert werden, dann gilt $\Phi(S') = \Phi(S) - \Delta$.

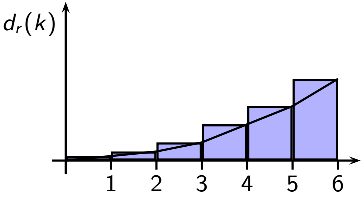


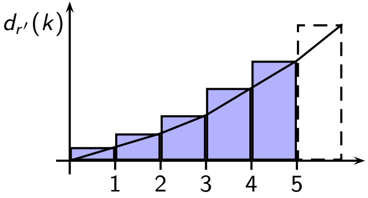
Im Bild ist der Wert der Potenzialfunktion die blaue Fläche. Wenn ein Spieler von r' zu r wechselt, verändern sich seine Kosten genau wie der Wert der Potenzialfunktion.

Satz von Rosenthal: Beweis

Lemma

Sei S ein beliebiger Zustand. Wenn wir von S zu Zustand S' wechseln mit einem Verbesserungsschritt von Spieler i, in dem seine Kosten um $\Delta > 0$ verringert werden, dann gilt $\Phi(S') = \Phi(S) - \Delta$.





Im Bild ist der Wert der Potenzialfunktion die blaue Fläche. Wenn ein Spieler von r' zu r wechselt, verändern sich seine Kosten genau wie der Wert der Potenzialfunktion.

Satz von Rosenthal: Beweis

Lemma

Sei S ein beliebiger Zustand. Wenn wir von S zu Zustand S' wechseln mit einem Verbesserungsschritt von Spieler i, in dem seine Kosten um $\Delta > 0$ verringert werden, dann gilt $\Phi(S') = \Phi(S) - \Delta$.

Beweis:

- Das Potenzial $\Phi(S)$ kann berechnet werden, in dem Spieler nacheinander in beliebiger Ordnung in das Spiel eingefügt und die Latenzen zum Zeitpunkt des Einfügens summiert werden.
- O.B.d.A. sei Spieler i der letzte Spieler, den wir einfügen wenn wir $\Phi(S)$ berechnen. Für diesen Spieler addieren wir seine tatsächlichen Kosten in Zustand S zu $\Phi(S)$.
- Wenn wir uns von S zu S' bewegen, dann sinken die Kosten von i um Δ. Folglich sinkt das Potenzial Φ auch genau um Δ. $\square$ (Lemma)

Satz von Rosenthal: Beweis

Das Lemma zeigt, dass Φ ein *exaktes Potenzial* ist, d.h. wenn ein einzelner Spieler seine Latenz um einen Wert $\Delta > 0$ verringert, dann sinkt Φ um genau den gleichen Wert Δ.

Daneben stellen wir fest:

i) Die Latenzwerte sind ganze Zahlen. Bei jeder Verbesserung gilt $\Delta \geq 1$.

ii) Für jeden Zustand S gilt $\Phi(S) \leq \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{i=1}^{n} |d_r(i)|$.

iii) Für jeden Zustand S gilt $\Phi(S) \geq -\sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{i=1}^{n} |d_r(i)|$.

Daraus folgt, dass die Anzahl Verbesserungsschritte höchstens $2 \cdot \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{i=1}^{n} |d_r(i)|$ beträgt und endlich ist. □ (Theorem)

Potenzialspiele

Definition (Potenzialspiel)

Ein strategisches Spiel $\Gamma = (\mathcal{N}, (\Sigma_i)_{i\in\mathcal{N}}, (c_i)_{i\in\mathcal{N}})$ heißt exaktes Potenzialspiel wenn es eine Funktion $\Phi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für jedes $i \in \mathcal{N}$, für jedes $S_{-i} \in \Sigma_{-i}$, und für jede $S_i, S_i' \in \Sigma_i$ gilt:

$$c_i(S_i, S_{-i}) - c_i(S_i', S_{-i}) \quad = \quad \Phi(S_i, S_{-i}) - \Phi(S_i', S_{-i}) \ .$$

Beobachtung:
Sei $\Gamma = (\mathcal{N}, (\Sigma_i)_{i\in\mathcal{N}}, (c_i)_{i\in\mathcal{N}})$ ein exaktes Potenzialspiel. Dann hat Γ die endliche Verbesserungseigenschaft (Engl: finite improvement property), und daher existiert ein reines Nash-Gleichgewicht.

Auslastungs- und Potenzialspiele

Es folgt mit Rosenthals Potenzialfunktion:

Corollary

Jedes Auslastungsspiel ist ein (exaktes) Potenzialspiel.

In gewisser Weise gilt auch die andere Richtung:

Satz (Monderer, Shapley, 1996)

Jedes exakte Potenzialspiel ist "isomorph" zu einem Auslastungsspiel.

Für jedes exakte Potenzialspiel gibt es ein anderes Spiel mit den gleichen Spielern, Strategien und Kosten. Dies andere Spiel basiert auf geschickt zusammengestellten Ressourcen und Latenzen, so dass die Strategien als Teilmengen von Ressourcen dargestellt werden können und die Kosten sich als Summe über deren Latenzen ergeben. In diesem Sinne gibt es eine Representation des Potenzialspiels als "isomorphes" Auslastungsspiel.

Die zentrale Frage in diesem Kapitel

Wie viele Verbesserungsschritte werden benötigt, um ein reines Nash-Gleichgewicht zu erreichen?

Übergangsgraph

- Der *Übergangsgraph* eines Auslastungsspiels Γ enthält einen Knoten für jeden Zustand S und eine gerichtete Kante (S, S') wenn S' von S mit einem Verbesserungsschritt eines einzelnen Spielers erreicht werden kann.
- Der *Beste-Antwort-Übergangsgraph* enthält nur Kanten für Verbesserungsschritte, die besten Antworten entsprechen.

Eine Folge von Verbesserungsschritten (bzw. besten Antworten) entspricht einem Weg im Übergangsgraphen (bzw. Beste-Antwort-Übergangsgraphen).

Die Senken dieses Graphen sind die Nash-Gleichgewichte von Γ.

Die Anzahl der Knoten (Zustände) kann bis zu 2^{mn} betragen. Daher kann es Wege mit exponentieller Länge geben.

Singleton-Auslastungsspiele

Definition (Singleton-Auslastungsspiel)

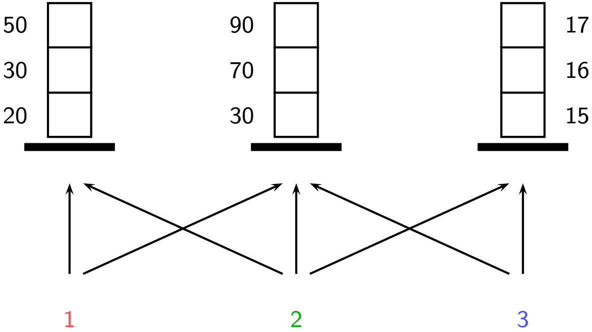
Ein Auslastungsspiel heißt singleton wenn für jeden Spieler $i \in \mathcal{N}$ und jede Stratgie $R \in \Sigma_i$ gilt $|R| = 1$.

In Worten: Jeder Spieler möchte nur eine Ressource aus einer für ihn zulässigen Teilmenge von Ressourcen auswählen.

Obwohl dies eine relativ starke Einschränkung des Strategieraumes ist, gibt es immer noch bis zu m^n unterschiedliche Zustände in einem Spiel dieser Art.

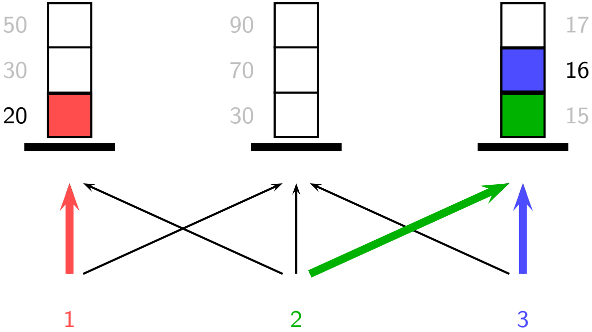
Singleton-Auslastungsspiele – Beispiel

Betrachte eine "Server-Farm" mit drei Servern a, b, c (Ressourcen) und drei Spielern 1,2,3. Jeder der Spieler möchte einen Task auf genau einem Server berechnen lassen und wählt ihn strategisch nach der resultierenden Bearbeitungszeit.



Singleton-Auslastungsspiele – Beispiel

Betrachte eine "Server-Farm" mit drei Servern a, b, c (Ressourcen) und drei Spielern 1,2,3. Jeder der Spieler möchte einen Task auf genau einem Server berechnen lassen und wählt ihn strategisch nach der resultierenden Bearbeitungszeit.



Nash-Gleichgewicht

Singleton-Auslastungsspiele – Konvergenz

Satz

In Singleton-Auslastungsspielen hat jede Verbesserungsfolge eine Länge von $O(n^2 m)$.

Beweisidee:

- Ersetze Latenzwerte durch beschränkte, positive ganze Zahlen ohne die Präferenzen der Spieler zu verändern.
- Damit ergibt sich eine obere Schranke auf den Maximalwert des Potenzials.
- Durch ganzzahlige Latenzen sinkt das Potenzial im Verbesserungsschritt um mind. 1. Daher ist die Länge jeder Verbesserungsfolge beschränkt durch maximalen Potenzialwert.

Singleton-Spiele: Beweis

Sortiere die Menge der Latenzwerte $\{d_r(k) \mid r \in \mathcal{R}, 1 \leq k \leq n\}$ in nicht-fallender Reihenfolge. Wir definieren alternative, neue Latenzfunktionen:

$$\bar{d}_r(k) := \text{Position von } d_r(k) \text{ in Sortierung.}$$

Beispiel:

Die sortierte Menge von Latenzen aus dem obigen Beispiel ist

$$15, 16, 17, 20, 30, 50, 70, 90.$$

Daher ergeben sich die alten und neuen Latenzfunktionen als

$d_a(1,2,3) = (20,30,50)$ $\quad$ $\bar{d}_a(1,2,3) = (4,5,6)$
$d_b(1,2,3) = (30,70,90)$ $\quad$ $\bar{d}_b(1,2,3) = (5,7,8)$
$d_c(1,2,3) = (15,16,17)$ $\quad$ $\bar{d}_c(1,2,3) = (1,2,3)$

Die neue Latenz von Spieler i auf Ressource r in Zustand S ist $\bar{\delta}_i(S) = \bar{d}_r(n_r(S))$.

Singleton-Spiele: Beweis

Beobachtung:

Seien S und S' zwei Zustände, so dass (S, S') einen Verbesserungsschritt darstellt für einen Spieler i mit originalen Latenzen. Dann ist (S, S') auch ein Verbesserungsschritt für i mit neuen Latenzen.

Rosenthals Potenzialfunktion mit neuen Latenzen ist beschränkt durch:

$$\bar{\Phi}(S) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{k=1}^{n_r(S)} \bar{d}_r(k) \leq \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{k=1}^{n_r(S)} n\, m \leq n^2 m \ .$$

Es gilt $\bar{\Phi} \geq 1$. Daneben fällt $\bar{\Phi}$ um mind. 1 in jedem Schritt. Daher beträgt die Länge jeder Verbesserungsfolge höchstens $n^2 m$. $\square$ (Satz)

Auslastungsspiele

Existenz eines reinen Nash-Gleichgewichtes

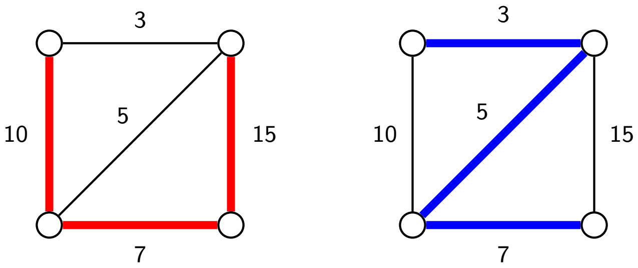
Konvergenzzeit in Singleton-Spielen

Konvergenzzeit in Matroidspielen

Eine genauere Frage

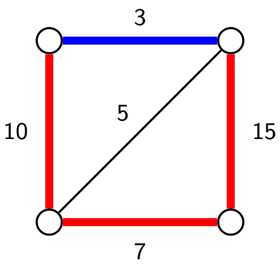
Welche kombinatorische Eigenschaft der individuellen Strategieräume garantiert eine polynomielle Schranke auf die Konvergenzzeit?

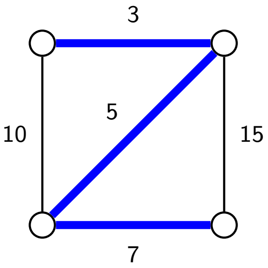
Spannbäume



- Jeder Spannbaum eines Graphen $G = (V, E)$ hat $|V| - 1$ Kanten.
- Ein Spannbaum T kann in einen Spannbaum T^* mit minimalen Kosten transformiert werden, indem wir nacheinander einzelne Kanten austauschen. Dies ergibt eine Folge $T = T_0, T_1, \ldots, T_l = T^*$.
- In der Folge von Bäumen können sich die Kosten in jedem Schritt nur verbessern: $c(T_i) \geq c(T_{i+1})$.

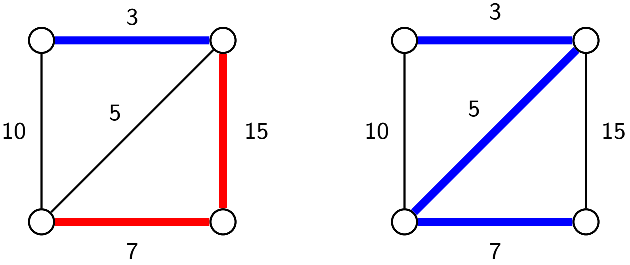
Spannbäume





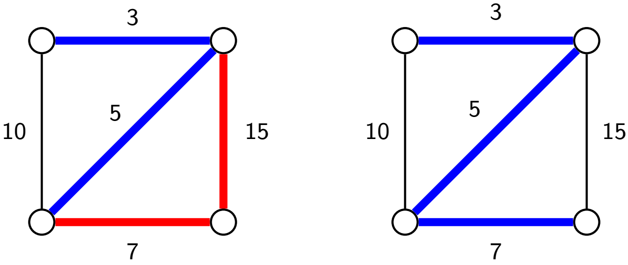
- Jeder Spannbaum eines Graphen $G = (V, E)$ hat $|V| - 1$ Kanten.
- Ein Spannbaum T kann in einen Spannbaum T^* mit minimalen Kosten transformiert werden, indem wir nacheinander einzelne Kanten austauschen. Dies ergibt eine Folge $T = T_0, T_1, \ldots, T_l = T^*$.
- In der Folge von Bäumen können sich die Kosten in jedem Schritt nur verbessern: $c(T_i) \geq c(T_{i+1})$.

Spannbäume



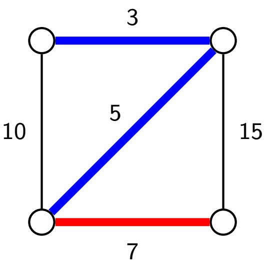
- Jeder Spannbaum eines Graphen $G = (V, E)$ hat $|V| - 1$ Kanten.
- Ein Spannbaum T kann in einen Spannbaum T^* mit minimalen Kosten transformiert werden, indem wir nacheinander einzelne Kanten austauschen. Dies ergibt eine Folge $T = T_0, T_1, \ldots, T_l = T^*$.
- In der Folge von Bäumen können sich die Kosten in jedem Schritt nur verbessern: $c(T_i) \geq c(T_{i+1})$.

Spannbäume



- Jeder Spannbaum eines Graphen $G = (V, E)$ hat $|V| - 1$ Kanten.
- Ein Spannbaum T kann in einen Spannbaum T^* mit minimalen Kosten transformiert werden, indem wir nacheinander einzelne Kanten austauschen. Dies ergibt eine Folge $T = T_0, T_1, \ldots, T_l = T^*$.
- In der Folge von Bäumen können sich die Kosten in jedem Schritt nur verbessern: $c(T_i) \geq c(T_{i+1})$.

Spannbäume



- Jeder Spannbaum eines Graphen $G = (V, E)$ hat $|V| - 1$ Kanten.
- Ein Spannbaum T kann in einen Spannbaum T^* mit minimalen Kosten transformiert werden, indem wir nacheinander einzelne Kanten austauschen. Dies ergibt eine Folge $T = T_0, T_1, \ldots, T_l = T^*$.
- In der Folge von Bäumen können sich die Kosten in jedem Schritt nur verbessern: $c(T_i) \geq c(T_{i+1})$.

Spannbaumspiele

In einem Spannbaumspiel sind die Ressourcen die Kanten eines Graphen G. Die Strategien Σ_i für Spieler $i \in \mathcal{N}$ sind die Spannbäume eines Subgraphen G_i.

Satz

In einem Spannbaumspiel auf einem Graphen mit k Knoten hat jede Folge von besten Antworten eine Länge von $O(n^2\, m\, k)$.

Beweisidee:

- In jedem Schritt möchte ein Spieler i abweichen zu seiner besten Antwort, d.h. einem momentan minimalen Spannbaum
- Verwandle den mometan gewählten Baum von i in seine beste Antwort durch eine Folge von 1-zu-1-Austauschen von Kanten
- Dabei können wir die Latenzwerte durch Positionen in der Rangliste ersetzen, ohne dass wir die Präferenzen verändern. Schnelle Konvergenz mit gleichem Argument wie für Singleton-Spiele.

Exkursion: Matroide – Definition

Wir beweisen den Satz für allgemeinere Strukturen genannt "Matroide".

Definition (Matroid)

Ein Tupel $M = (\mathcal{R}, \mathcal{I})$ ist ein Matroid, wenn $\mathcal{R} = \{1, \ldots, m\}$ eine endliche Menge von Elementen und $\mathcal{I}$ eine nicht-leere Familie von Teilmengen von $\mathcal{R}$ ist, für die gilt:

- Wenn $I \in \mathcal{I}$ und $J \subseteq I$, dann ist auch $J \in \mathcal{I}$, und
- wenn $I, J \in \mathcal{I}$ und $|J| < |I|$, dann gibt es ein $i \in I \backslash J$ mit $J \cup \{i\} \in \mathcal{I}$.

Notation

- Eine Menge $I \in \mathcal{I}$ heißt unabhängig.
- Eine maximale unabhängige Menge $B \in \mathcal{I}$ heißt Basis.
- Die Kardinalität jeder Basis ist gleich und heißt Rang $rk(M)$ des Matroids.

Exkursion: Matroide – Beispiele

Graphischer Matroid

In einem *graphischen Matroid*

- sind Elemente die Kanten eines Graphen $G = (V, E)$,
- unabhängige Mengen sind Wälder, Basen sind Spannbäume von G, und
- der Rang ist $|V| - 1$, da jeder Spannbaum aus $|V| - 1$ Kanten besteht.

Weitere Beispiele

Die folgenden Klassen von unabhängigen Mengen definieren einen Matroid:

- Mengen von linear unabhängigen Spaltenvektoren einer Matrix *(Spaltenmatroid)*
- Mengen von höchstens k Elementen einer Grundmenge *(Uniformer Matroid)*
- Mengen von Elementen aus einer partitionierten Grundmenge, höchstens eines aus jeder Partition *(Partitionsmatroid)*

Exkursion: Matroide

Definition (Gewichteter Matroid)

- Ein Matroid mit Gewichtsfunktion $w : \mathcal{R} \to \mathbb{N}$ heißt gewichtet.
- Das Gewicht einer unabhängigen Menge I ist $w(I) = \sum_{r \in I} w(r)$.
- Eine optimale Basis ist eine Basis mit minimalem Gewicht.

Eine sehr angenehme Eigenschaft eines Matroids besteht darin, dass ein einfacher Greedy-Algorithmus eine eine optimale Basis berechnet.[1]

[1] Man kann sogar formal beweisen: Ein Mengensystem, das abgeschlossen ist unter der Teilmengenoperation, ist ein Matroid genau dann, wenn der Greedy-Algorithmus immer eine optimale Basis berechnet, für jede mögliche Gewichtsfunktion.

Exkursion: Matroide

Der oben beschriebene 1-zu-1-Kantenaustausch ist eine allgemeine Eigenschaft von Matroiden und die entscheidende Einsicht, um den Beweis von polynomieller Konvergenzzeit für Singleton-Spiele auf so genannte "Matroidspiele" zu verallgemeinern.

Proposition *(Austauscheigenschaft)*

Sei B eine Basis und B^* eine optimale Basis. Dann gibt es eine Folge $(r_1, r_1^*), \ldots, (r_k, r_k^*) \in B \times B^*$, $0 \leq k \leq m$, so dass für $0 \leq i \leq k$ gilt

- $B_i = B \cup \{r_1^*, \ldots, r_i^*\} \setminus \{r_1, \ldots, r_i\}$ ist eine Basis,
- $B^* = B_k$ und
- $w(B_i) \leq w(B_{i-1})$, for $1 \leq i \leq k$.

Auslastungsspiele mit Matroiden

Definition (Matroidspiel)

- Ein Auslastungsspiel Γ heißt Matroidspiel, wenn für jeden Spieler $i \in \mathcal{N}$ die Menge Σ_i aus Basen eines Matroids über (einer Teilmenge von) $\mathcal{R}$ besteht.
- Der Rang des Spiels, $\mathrm{rk}(\Gamma)$, ist gegeben durch den maximalen Rang der Matroide der Spieler.

Satz (Ackermann, Röglin, Vöcking, 2008)

In einem Matroidspiel Γ hat jede Folge von besten Antworten eine Länge von $O(n^2\, m\, rk(\Gamma))$.

Beweis:

- Definiere neue Latenzen $\bar{d}_r(\cdot)$ durch Position in der Rangfolge wie oben.
- Neue Latenz des Spielers i in Zustand S ist $\bar{\delta}_i = \sum_{r \in S_i} \bar{d}_r(n_r(S))$.

Matroidspiele – Beweis

Behauptung:

Seien S und S' zwei Zustände, so dass (S, S') einen Verbesserungsschritt darstellt für einen Spieler i mit originalen Latenzen. Dann ist (S, S') auch ein Verbesserungsschritt für i mit neuen Latenzen.

Beweis der Behauptung:

- S' optimale Basis und S sub-optimale Basis für Spieler i.
- Mit der Austauscheigenschaft teilen wir die beste Antwort (S, S') auf in eine Folge von 1-zu-1-Austauchen von Ressourcen $S = S^1, S^2, \ldots, S^k = S'$, so dass keiner dieser Austausche die originalen Latenzen erhöht und mindestens ein Austausch sie strikt verringert.
- Beachte:

$$\begin{aligned} \delta_i(S^j) = \delta_i(S^{j+1}) \quad &\Rightarrow \quad \bar{\delta}_i(S^j) = \bar{\delta}_i(S^{j+1}) \text{ , } \textit{und} \\ \delta_i(S^j) > \delta_i(S^{j+1}) \quad &\Rightarrow \quad \bar{\delta}_i(S^j) > \bar{\delta}_i(S^{j+1}) \text{ ,} \end{aligned}$$

und somit $\bar{\delta}(S) > \bar{\delta}(S')$. □ (Behauptung)

Matroidspiele – Beweis

Rosenthals Potenzialfunktion mit neuen Latenzen ist beschränkt durch

$$\bar{\Phi}(S) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{k=1}^{n_r(S)} \bar{d}_r(k) \leq \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{k=1}^{n_r(S)} n\, m \leq n^2\, m\, \mathrm{rk}(\Gamma) .$$

Daher ist die Länge jeder Folge von besten Antworten höchstens $n^2 m\, \mathrm{rk}(\Gamma)$.

$\square$ (Satz)

Schnelle Konvergenz über Matroide hinaus?

Ist es möglich, die Eigenschaft von polynomieller Konvergenz auch über Matroide hinaus zu zeigen? Zu dieser Frage betrachten wir den Speziafall von Auslastungsspielen mit positiven Latenzen.

Nehmen wir an, dass die Strategiemengen eines Spielers zwei Strategien S und T enthalten, so dass $S \subset T$. Beachte, dass T niemals eine beste Antwort darstellt, denn die Latenz von S ist immer strikt kleiner als die von T (denn alle Latenzen von Ressourcen sind positiv).

Wir können uns also auf Strategiemengen beschränken, die *inklusionsfrei* sind, d.h., für jeden Spieler i enthält Σ_i keine zwei Strategien S und T mit $S \subset T$.

Schnelle Konvergenz über Matroide hinaus?

Sei $\mathcal{P}$ eine Klasse von inklusionsfreien Mengensystemen, so dass es mind. ein Mengensystem $\mathcal{S}$ in $\mathcal{P}$ gibt, das ein *nicht-Matroid* ist, d.h., die Mengen in $\mathcal{S}$ sind nicht die Basen eines Matroids.

Prof. Pinocchio behauptet ...

In jedem Auslastungsspiel, in dem die Strategieräume jedes Spielers aus dem Mengensystem $\mathcal{P}$ sind, ist die Länge jeder Folge von besten Antworten polynomiell in der Anzahl von Spielern und Ressourcen.

Der folgende Satz zeigt, dass Prof. Pinocchio falsch liegt.

Schnelle Konvergenz über Matroide hinaus?

Satz (Ackermann, Röglin, Vöcking, 2008)

Sei $\mathcal{S}$ ein nicht-Matroid-Mengensystem. Für jedes n gibt es ein Auslastungsspiel mit $\Theta(n)$ Spielern und $\Theta(n)$ Ressourcen, das die folgenden Eigenschaften hat:

- *Die Strategiemenge jedes Spielers ist isomorph zu $\mathcal{S}$,*
- *die Latenzfunktionen sind positiv und nicht-fallend, und*
- *es gibt einen Startzustand S, so dass jede Folge von besten Antworten von S zum Nash-Gleichgewicht eine Länge von $\Theta(2^n)$ hat.*

Keine andere, weniger restriktive Eigenschaft für die individuellen Strategieräume kann (ohne weitere Annahmen auf die Latenzwerte) in jedem Spiel, in dem die Strategieräume diese Eigenschaft erfüllen, eine polynomielle Konvergenzzeit garantieren.

In diesem Sinne ist die Matroideigenschaft *maximal*.

Literatur

- D. Monderer, L. Shapley. Potential Games. Games and Economic Behavior 14:1124–1143, 1996. (Potenzialspiele sind Auslastungsspiele)
- S. Ieong, R. McGrew, E. Nudelman, Y. Shoham, Q. Sun. Fast and Compact: A Simple Class of Congestion Games. Proc. AAAI Conference on Artifical Intelligence, pp. 489–494, 2005. (Singletonspiele)
- H. Ackermann, H. Röglin, B. Vöcking. On the impact of combinatorial structure on congestion games. Journal of the ACM 55(6), 2008. (Matroidspiele, Konvergenzzeiten)