Braess-Paradoxon und der Preis der Anarchie

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2017

Wardropspiele

Braess-Paradoxon und der Preis der Anarchie

Existenz und Eindeutigkeit von Wardrop-Gleichgewichten

Verkehrsmodell von Wardrop

Ein Wardropspiel ist gegeben durch

- einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$
- k Arten von Verkehr (genannt "Commodities") mit Quelle-Senke-Paar (s_i, t_i) und Aufkommen (genannt "Rate") r_i, für $i \in [k] = \{1, \ldots, k\}$
- Latenzfunktionen $d_e : [0, 1] \to \mathbb{R}$, für $e \in E$
- Commodity i besteht aus unendlich vielen, infinitesimal kleinen Spielern mit Gesamtmasse r_i.

Wardropspiele heißen auch *nicht-atomische* Auslastungsspiele, mit "unendlich vielen, unendlich kleinen" Spielern. Sie dienen als Modell für Systeme mit einer Vielzahl von Nutzern, in denen der Einfluß eines einzelnen Akteurs sehr gering ist (z.B. riesige Verkehrs- oder Computernetzwerke).

Wardropspiele mit einer Commodity

Vereinfachende Annahmen:

- Latenzfunktionen sind nicht-negativ, nicht-fallend und konvex.
- Wir betrachten Spiele mit einer Commodity, Quelle s und Senke t.
- Rate normalisiert auf $r_1 = 1$.

Flüsse und Latenzen im Wardropspiel:

- Sei $\mathcal{P}$ die Menge von Pfaden P von s nach t.
- Ein Fluß liefert einen Flußwert $f_P \in [0,1]$, für jeden $P \in \mathcal{P}$, mit $\sum_{P \in \mathcal{P}} f_P = 1$.
- Der Kantenfluß auf $e \in E$ ist $f_e = \sum_{P \ni e} f_P$.
- Die Latenz auf Kante $e \in E$ bei Fluß f ist $d_e(f_e)$.
- Die Latenz auf Pfad $P \in \mathcal{P}$ bei Fluß f ist $d_P(f) = \sum_{e \in P} d_e(f_e)$.

Wardrop-Gleichgewicht

Definition (Wardrop-Gleichgewicht)

Ein Fluß f ist ein Wardrop-Gleichgewicht wenn für jedes Paar von Pfaden $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ mit $f_{P_1} > 0$ gilt $d_{P_1}(f) \leq d_{P_2}(f)$.

Beobachtungen:

- Genau genommen ist ein Wardrop-Gleichgewicht **kein Zustand des Spiels**, es werden nur Flusswerte angegeben, aber keine explizite Strategie (s-t-Pfad) für jeden einzelnen Spieler.
- Jedes Wardrop-Gleichgewicht **kann interpretiert werden als Nash-Gleichgewicht** – wenn wir Spieler gemäß der Flusswerte auf Pfade verteilen, bekommt jeder Spieler einen Pfad mit momentan optimalen Kosten.
- Im Wardrop-Gleichgewicht könnte es aber **auch endlich viele Spieler** geben, die suboptimale Pfade wählen. Da diese infinitesimal klein sind, fallen sie bei der Flußbedingung nicht ins Gewicht.

Wardropspiele

Braess-Paradoxon und der Preis der Anarchie

Existenz und Eindeutigkeit von Wardrop-Gleichgewichten

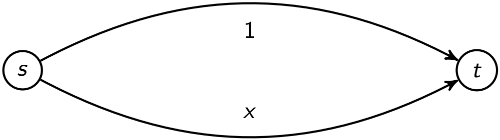
Soziale Kosten

Wir betrachten soziale Kosten als die durchschnittliche Latenz aller Pfade.

Definition (Soziale Kosten)

Die sozialen Kosten eines Flusses f sind das gewichtete Mittel der Spieler/Pfadlatenzen

$$C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} d_P(f) \cdot f_P = \sum_{e \in E} d_e(f_e) f_e \quad .$$



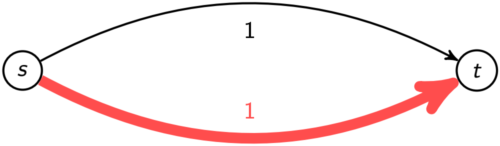
Soziale Kosten

Wir betrachten soziale Kosten als die durchschnittliche Latenz aller Pfade.

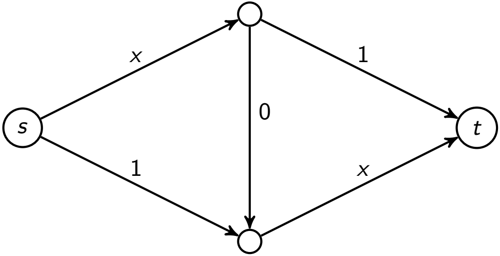
Definition (Soziale Kosten)

Die sozialen Kosten eines Flusses f sind das gewichtete Mittel der Spieler/Pfadlatenzen

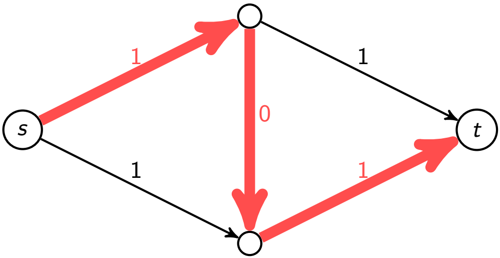
$$C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} d_P(f) \cdot f_P = \sum_{e \in E} d_e(f_e) f_e \quad .$$



Wardropspiele – Beispiel

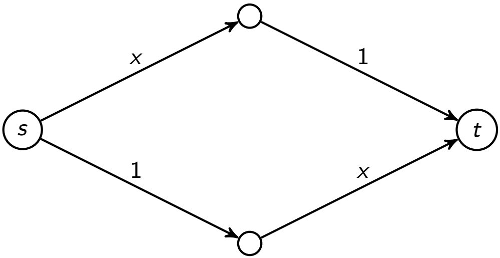


Wardropspiele – Beispiel



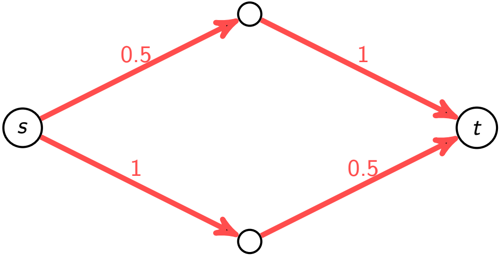
Soziale Kosten: 2

Wardropspiele – Beispiel



Soziale Kosten: 2

Wardropspiele – Beispiel



Soziale Kosten: 2 Soziale Kosten: 1.5

Braess Paradoxon: Zerstören einer schnellen Verbindung **verbessert** die Kosten im Gleichgewicht **für jeden einzelnen Spieler**.

Der Preis der Anarchie

Wie gut sind die sozialen Kosten in einem Wardrop-Gleichgewicht?

Welche Parameter des Spiels haben Einfluß auf die sozialen Kosten?

$$\textit{Preis der Anarchie} \stackrel{\mathit{def}}{=} \frac{\text{Soziale Kosten des schlechtesten Gleichgewichts}}{\text{Optimale soziale Kosten}} .$$

$$\textit{Preis der Stabilität} \stackrel{\mathit{def}}{=} \frac{\text{Soziale Kosten des besten Gleichgewichts}}{\text{Optimale soziale Kosten}} .$$

Satz (Roughgarden, Tardos, 2002)

Der Preis der Anarchie in Wardropspielen mit linearen Latenzfunktionen ist höchstens $^4/_3$.

Preis der Anarchie – Beweis (Correa, Schulz, Stier-Moses, 2008)

Sei f ein Fluß im Gleichgewicht. Sei g ein beliebiger Fluß.

$$\begin{aligned}
C(f) &= \sum_{P \in \mathcal{P}} f_P \, d_P(f) \\
&\le \sum_{P \in \mathcal{P}} g_P \, d_P(f) \\
&= \sum_{e \in E} g_e \, d_e(f_e) \\
&= \sum_{e \in E} g_e \left(d_e(g_e) + d_e(f_e) - d_e(g_e)\right) \\
&= C(g) + \sum_{e \in E} g_e \left(d_e(f_e) - d_e(g_e)\right) \; .
\end{aligned}$$

Preis der Anarchie – Beweis (Correa, Schulz, Stier-Moses, 2008)

Lemma

Für jede Kante $e \in E$,

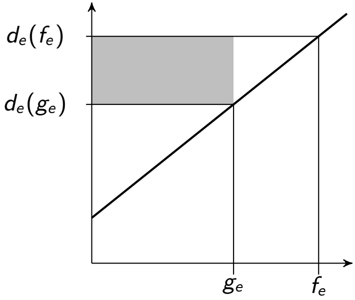
$$g_e\,(d_e(f_e) - d_e(g_e)) \;\le\; \frac{1}{4} f_e\, d_e(f_e) \;\;.$$

Beweis:

Das Lemma gilt offensichtlich wenn $f_e < g_e$, da in diesem Fall $d_e(f_e) \le d_e(g_e)$. Damit ist die linke Seite der Gleichung höchstens 0.

Preis der Anarchie – Beweis (Correa, Schulz, Stier-Moses, 2008)

Sei nun $f_e \geq g_e$ wie im folgenden Bild der Funktion d_e.



Durch Vergleich der Gebiete in der Zeichnung sehen wir

$$g_e\,(d_e(f_e) - d_e(g_e)) \;\leq\; \frac{1}{4} f_e\, d_e(f_e) \quad .$$

Damit ist das Lemma gezeigt. □

Preis der Anarchie – Beweis (Correa, Schulz, Stier-Moses, 2008)

Anwendung des Lemmas ergibt

$$\begin{aligned} C(f) &= C(g) + \sum_{e \in E} g_e \left(d_e(f) - d_e(g)\right) \\ &\leq C(g) + \frac{1}{4} \sum_{e \in E} f_e \, d_e(f) \\ &= C(g) + \frac{1}{4} C(f) \ . \end{aligned}$$

Daher gilt $\frac{3}{4} C(f) \leq C(g)$ für jeden Fluß g. Der Satz ist gezeigt. □

Theorem (Roughgarden, Tardos, 2002)

In Wardropspielen, in denen die Latenzfunktionen positive Polynome vom Grad d sind, ist der Preis der Anarchie ist höchstens $d + 1$.

Wardropspiele

Braess-Paradoxon und der Preis der Anarchie

Existenz und Eindeutigkeit von Wardrop-Gleichgewichten

Potenzialfunktion

Das Wardropspiel hat eine Potenzialfunktion

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_{x=0}^{f_e} d_e(x) dx \quad .$$

Grob gesagt ist dies Rosenthals Potenzialfunktion mit unendlich vielen, infinitesimal kleinen Spielern. Dadurch wird die zweite Summe zum Integral.

Jede Folge von Verbesserungsschritten einzelner Spieler müsste unendlich viele Schritte machen, um überhaupt den Wert des Potenzials zu verändern – das ist nicht zielführend. Das Potenzial liefert hier andere interessante Einsichten.

Existenz und Eindeutigkeit

Satz (Beckmann, McGuire, Winsten, 1956)

In jedem Wardropspiel mit stetigen Latenzfunktionen gibt es mindestens ein Wardrop-Gleichgewicht. Für stetige, streng monoton steigende Funktionen sind die Kantenflüsse im Gleichgewicht eindeutig.

Beweisidee:
Wir betrachten einen Fluß, der das Potenzial minimiert, und formulieren dies als Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcll} \text{Minimiere} & \Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_{x=0}^{f_e} d_e(x)dx & & & \\ \text{so dass} & f_e & = & \sum_{e \in P \in \mathcal{P}} f_P & \text{für jedes } e \in E \\ & \sum_{P \in \mathcal{P}} f_P & = & r_1 & \\ & f_P & \geq & 0 & \text{für jedes } P \in \mathcal{P} \end{array} \tag{1}$$

Existenz und Eindeutigkeit

Jede Latenzfunktion d_e ist stetig. Daher ist

$$D_e(f_e) = \int_{x=0}^{f_e} d_e(x)dx$$

stetig differenzierbar. Somit existiert eine optimale Lösung des Problems.

Mit $f_e = \sum_{e \in P \in \mathcal{P}} f_P$ gilt für die Ableitung

$$\frac{d}{df_P}\Phi(f) \quad = \quad \frac{d}{df_P}\sum_{e \in E}\int_{x=0}^{f_e} d_e(x)dx \quad = \quad \sum_{e \in P} d_e(f) \quad = \quad d_P(f_P) \ .$$

Die Rate $r_1 = 1$ muss optimal auf die Pfade verteilt werden. Wir verringern $\Phi(f)$, indem wir f_P mit hoher Ableitung verringern und dafür $f_{P'}$ mit kleiner Ableitung erhöhen. Im Optimum kann also kein Fluß von Pfaden mit höherer Latenz auf Pfade mit kleinerer Latenz verschoben werden.

Daher gilt in der optimalen Lösung für jeden Pfad P mit $f_P > 0$ und jeden beliebigen Pfad P', dass $d_P(f) \leq d_{P'}(f)$. Die optimale Lösung ist also ein Wardrop-Gleichgewicht.

Existenz und Eindeutigkeit

Wenn d_e streng monoton steigend in f_e ist, gilt das auch für d_P in f_P. Dann ist $\Phi(f)$ streng konvex in f_P. Wenn $\Phi(f)$ streng konvex ist, dann ist die optimale Lösung für die f_e eindeutig. □

Anmerkungen:

- Eindeutige Kantenflüsse $\Rightarrow$ **Eindeutige soziale Kosten** im Gleichgewicht. Daher gilt in diesen Spielen: Preis der Anarchie = Preis der Stabilität.
- Eindeutigkeit gilt **nicht** für die Aufteilung in Pfadflüsse f_P.
- Problem (1) kann mit dem Ellipsoidverfahren für konvexe Minimierungsprobleme in **polynomieller Zeit** gelöst werden (approximativ bzgl. einer vorher bestimmten numerischen Genauigkeit).

Korollar

Ein Wardrop-Gleichgewicht kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Literatur

- M. Beckmann, B. McGuire, C. Winsten. Studies in the Economies of Transportation. Yale University Press, 1956.
- D. Braess. Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. Unternehmensforschung 12:258–268, 1968.
- J. Correa, A. Schulz, N. Stier Moses, A Geometric Approach to the Price of Anarchy in Nonatomic Congestion Games. Games and Economic Behavior 64(2):457–469, 2008.
- N. Nisan, É. Tardos, T. Roughgarden, V. Vazirani. Algorithmic Game Theory, 2007 (Kapitel 18).
- T. Roughgarden, É. Tardos. How Bad is Selfish Routing? Journal of the ACM 49(2): 236–259, 2002.