Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Martin Hoefer, Paresh Nakhe

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Algorithmen und Komplexität
Institut für Informatik

Übung 2

Ausgabe: 25.04.2017
Abgabe: 02.05.2017

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und ***tackere*** *diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!*

Aufgabe 2.1. *Gemischte Beste-Antwort-Strategien* (2+3+3 Punkte)

Im Elfmeterschiessen-Spiel gibt es die zwei Spieler (S)chütze und (T)orwart. Jeder Spieler kann sich entscheiden für eine von drei Strategien: (L)inks, (M)itte oder (R)echts. Die Richtungen sind immer die vom Schützen und die Spieler sind Profis und nicht nervös – d.h., bei gleichen Strategien hält immer der Torwart und bei unterschiedlichen Strategien trifft immer der Schütze.

Wir stellen eine gemischte Strategie als Vektor $x_i = (x_{iL}, x_{iM}, x_{iR})$ dar.

a) Zeichne die Kostenmatrix des Spiels mit Kostenwerten aus $\{-1, 1\}$.

b) Bestimme alle Beste-Antwort-Strategien von S, wenn $x_T = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

c) Bestimme alle Beste-Antwort-Strategien von S, wenn $x_T = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Aufgabe 2.2. *Ungerade Anzahl von gemischten Nash-Gleichgewichten* (3+2 Punkte)

Der Satz von Nash beweist, dass in jedem endlichen Spiel mindestens ein gemischtes Nash-Gleichgewicht existiert. Hier zeigen wir, dass es in jedem Spiel eine ungerade Anzahl von gemischten Nash-Gleichgewichten gibt.

a) Betrachte ein unterteiltes Dreieck mit Sperner-Färbung wie in der Vorlesung. Die Konstuktion in der Vorlesung beweist, dass mindestens ein kleines dreifarbiges Dreieck existiert. Angenommen, es existiert ein zweites dreifarbiges Dreieck. Zeige, dass in diesem Fall auch ein drittes dreifarbiges Dreieck existiert.

b) Benutze die Aussage aus a) um zu argumentieren, dass eine ungerade Anzahl von gemischten Nash-Gleichgewichten existiert.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.3. *Mix-und-Match* (1+3 Punkte)

Seien (x^1, y^1) und (x^2, y^2) zwei gemischte Nash-Gleichgewichte in einem 2-Spieler Nullsummenspiel.

a) Sind auch (x^1, y^2) und (x^2, y^1) gemischte Nash-Gleichgewichte? Begründe Deine Antwort.

b) Betrachte den Zustand (x', y') mit

$$\begin{aligned} x'_j &= (x^1_j + x^2_j)/2 \qquad \text{für alle } j \in S_1 \\ y'_j &= (y^1_j + y^2_j)/2 \qquad \text{für alle } j \in S_2 \ . \end{aligned}$$

Zeige, dass (x', y') ein Nash-Gleichgewicht ist.

Hinweis: Benutze das Minimax Theorem.

Aufgabe 2.4. *Symmetrisches Nullsummenspiel* (3 Punkte)

Ein Nullsummenspiel mit zwei Spielern ist *symmetrisch* wenn beide Spieler k reine Strategien haben und für die Gewinnmatrix $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ gilt $a_{ij} = -a_{ji}$ für jedes Paar von Strategien $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Zeige, dass der Wert eines solchen Spiels 0 ist.

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
`http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/agt/sommer17/agt17.shtml`

Email: `mhoefer@cs.uni-frankfurt.de, Nakhe@em.uni-frankfurt.de`