Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Martin Hoefer, Paresh Nakhe

JOHANN WOLFGANG GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Algorithmen und Komplexität
Institut für Informatik

Übung 3

Ausgabe: 02.05.2017
Abgabe: 16.05.2017

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und ***tackere*** *diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!*

Aufgabe 3.1. *Potenzialspiel* (2 + 3 + 2 Punkte)

Betrachte das folgende Spiel:

	S	G
S	a a	c d
G	d c	b b

a) Für $a = 2, b = 4, c = 1$ und $d = 5$ ergibt sich ein Gefangendilemma. Konstruiere eine exakte Potenzialfunktion für dieses Spiel.

b) Beweise, dass für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ das resultierende Spiel ein exaktes Potenzialspiel ist.

c) Konstruiere ein 2×2-Spiel (2 Spieler, jeder 2 Strategien), so dass ein reines Nash-Gleichgewicht existiert, aber das Spiel kein Potenzialspiel ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.2. *Ordinale Potenzialspiele* (5+3 Punkte)

Wie in der Vorlesung skizziert gibt es eine Verallgemeinerung von exakten Potenzialspielen mit *ordinalem Potenzial.* Ein Spiel hat ein *ordinales Potenzial* Φ wenn für jeden Zustand s, jeden Spieler i und jede Abweichung von Strategie s_i zu Strategie s_i' gilt

$$\big(c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s_i', s_{-i}) > 0\big) \Rightarrow \big(\Phi(s_i, s_{-i}) - \Phi(s_i', s_{-i}) > 0\big) \quad .$$

a) In *Lastverteilungsspielen* gibt es eine Menge $\mathcal{N}$ von n Spielern und eine Menge $\mathcal{M}$ von m identischen Maschinen. Jeder Spieler i hat einen Task mit einer Bearbeitungszeit $p_i \geq 0$ und wählt als Strategie eine der Maschinen (also Strategiemenge $S_i = \mathcal{M}$). Für einen Zustand $s = (s_i, s_{-i})$ sind die Kosten für Spieler i gegeben durch die Summe der Bearbeitungszeiten von Tasks auf seiner gewählten Maschine,

$$c_i(s) = \sum_{j \in \mathcal{N}, s_j = s_i} p_j \quad .$$

Entwirf ein ordinales Potenzial für Lastverteilungsspiele und zeige damit, dass diese Spiele die endliche Verbesserungseigenschaft erfüllen.

b) Nun nehmen wir an, dass die Maschinen unterschiedlich sind. Für jede Maschine $M_j \in \mathcal{M}$ hat Spieler i hier eine eigene (möglicherweise andere) Bearbeitungszeit $p_{ij} \geq 0$. Im Zustand $s = (s_i, s_{-i})$ sind die Kosten für i wieder die Bearbeitungszeit auf der gewählten Maschine,

$$c_i(s) = \sum_{j \in \mathcal{N}, s_j = s_i} p_{j,s_j} \quad .$$

Zeige, dass auch jedes dieser Spiele ein ordinales Potenzial hat – oder entwirf ein solches Spiel, in dem eine unendliche Folge von Verbesserungsschritten existiert.

Aufgabe 3.3. *Max-Zuerst* (5 Punkte)

Betrachte das Lastbalancierungsspiel mit identischen Maschinen aus dem (a)-Teil der letzten Aufgabe. Die Spieler seien nummeriert in nicht-steigender Reihenfolge ihrer Bearbeitungszeit, also $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n \geq 0$. Betrachte die folgende Max-Zuerst-Dynamik:

> Sei s ein beliebiger Startzustand.
> Solange s kein reines Nash-Gleichgewicht ist:
>
> - Sei V die Menge der Spielern, die in s keine beste Antwort spielen. Sei i ein Spieler aus V mit größter Bearbeitungszeit p_i. Sei s_i' seine beste Antwort auf s_{-i}.
> - Aktualisiere den Zustand zu $s \leftarrow (s_i', s_{-i})$.

Beweise, dass diese Max-Zuerst-Dynamik maximal n Aktualisierungen vornimmt, bevor sie ein reines Nash-Gleichgewicht erreicht.

Aufgabe 3.4. *Ordinales Potenzial und endliche Verbesserungen* (2+5 Punkte)

Jedes ordinale Potenzialspiel hat die endliche Verbesserungseigenschaft: Da das Potenzial strikt sinkt in jedem Schritt, in dem sich ein Spieler strikt verbessert, kann es nur azyklische und damit endliche Folgen von Verbesserungsschritten geben. Wir betrachten hier die Umkehrung.

Sei Γ ein strategisches Spiel, in dem die endliche Verbesserungseigenschaft gilt – jede Folge von Verbesserungsschritten in Γ ist endlich. Zeige, dass

a) in Γ immer ein reines Nash-Gleichgewicht existiert, und

b) Γ ein ordinales Potenzial hat.

Aufgabe 3.5. *Sensor-Netzwerke* (3+3+2+3 Punkte)

Sensoren können genutzt werden, um in großflächigen Bereichen Events zu erfassen, um z.B. bei Waldbränden Alarm zu schlagen. Die Lebensdauer eines Sensornetzwerks kann bedeutend verlängert werden, wenn Sensoren abgeschaltet werden sofern ihre Umgebung bereits gut durch andere Sensoren abgedeckt ist. Die Nachbarschaft zwischen Sensoren wird durch einen Graphen dargestellt. Ein vereinfachtes spieltheoretisches Modell für die Abwägung zwischen Betriebskosten und Abdeckung ergibt sich wie folgt.

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Betriebskosten $c > 0$. Jeder Knoten $v \in V$ sei ein Spieler mit zwei Strategien AN_v oder AUS_v. Die Kosten eines Spielers v sind gegeben durch:

$$c_v(s) = \begin{cases} |\{s_w = AUS_w \text{ und } \{v,w\} \in E\}|, & \text{wenn } s_v = AUS_v \\ c & \text{wenn } s_v = AN_v \end{cases}$$

a) Zeige, dass dieses Spiel ein exaktes Potenzialspiel ist.

b) Konstruiere ein isomorphes Auslastungsspiel mit Strategieraum $\Sigma_i = \{AN_i, AUS_i\}$ für jeden Spieler $i \in \mathcal{N}$. Definiere Ressourcen und Latenzfunktionen so dass sich für einen Zustand die gleichen Kosten wie im Spiel oben ergeben.

c) Ist das so erhaltene Spiel ein Matroidspiel? Begründe Deine Aussage.

d) Zeige, dass jede Folge von besten Antworten höchstens eine Länge $O(n^3)$ hat, wobei n die Anzahl der Spieler ist. Was ist die kleinste Schranke in Abhängigkeit von n, die Du zeigen kannst?

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
`http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/agt/sommer17/agt17.shtml`

Email: `mhoefer@cs.uni-frankfurt.de, Nakhe@em.uni-frankfurt.de`