Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Martin Hoefer, Paresh Nakhe

JOHANN WOLFGANG GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN
Algorithmen und Komplexität
Institut für Informatik

Übung 5

Ausgabe: 23.05.2017
Abgabe: 30.05.2017

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und ***tackere*** *diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!*

Aufgabe 5.1. *Gegner im Expertenproblem* (2 + 2 + 2 Punkte)

Bei der Analyse von No-Regret Algorithmen haben wir ein Gegnermodell betrachtet, mit dem die Kosten der Experten, $\ell^1, \ell^2, \ldots, \ell^T$ generiert werden – damit ist klar, dass die Algorithmen No-Regret Garantien liefern, selbst wenn die Kosten auf andere (nicht-gegnerische) Art zustande kommen. Beim Gegnermodell kann es allerdings Unterschiede geben, je nachdem was der Gegner weiß und wie mächtig er ist. Betrachte die folgenden Typen von Gegnern.

Typ "Unbewusst": Alle Kostenvektoren von Experten, $\ell^1, \ell^2, \ldots, \ell^T$, werden vor der Beginn des ersten Zeitschritts vom Gegner generiert und danach nicht mehr verändert. Vektor ℓ^t wird nach der Expertenwahl des Algorithmus in Schritt t nur noch aufgedeckt.

Typ "Zufallsfixiert": In jedem Schritt t kennt der Gegner die Wahrscheinlichkeitsverteilung, mit der der Algorithmus einen Experten auswählt. Darauf basierend generiert der Gegner im Schritt t einen Kostenvektor ℓ^t.

Typ "Allwissend": In jedem Schritt t kennt der Gegner den Experten, den der Algorithmus (nach Ziehen aus seiner Wahrscheinlichkeitsverteilung) auswählt. Darauf basierend generiert der Gegner im Schritt t einen Kostenvektor ℓ^t.

Argumentiere für jeden dieser Gegner, ob man einen Algorithmus mit No-Regret Garantie entwerfen kann oder nicht.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.2. *Cournot-Oligopol* (5 Punkte)

Das Cournot-Oligopol ist ein klassisches Wettbewerbsmodell für Preiskampf in Märkten. Es gibt k Anbieter, die alle das exakt gleiche Produkt produzieren (z.B. Nudeln, Reis, etc.). Eine Strategie $s_i \in [0, m]$ von Anbieter i gibt die Menge des Produkts an, die von i produziert wird (wobei m die maximale Produktionsmenge ist).

Die Nachfrage ist immer höher als das Angebot. Hier betrachten wir eine lineare Preisfunktion. In Zustand $s = (s_1, \ldots, s_k)$ ist der Preis

$$p(s) = 1 - a \sum_{j=1}^{k} s_j \quad ,$$

mit $a \leq \frac{1}{mk}$. Der Nutzen von Anbieter i ist Ertrag abzüglich Kosten, also

$$u_i(s) = p(s) \cdot s_i - c \cdot s_i \quad ,$$

mit $c > 0$ den Produktionskosten für eine Einheit des Produkts.

Zeige, dass das lineare Cournot-Oligopol ein sozial konkaves Spiel ist.

Aufgabe 5.3. *Bandbreitenspiel* (2+5 Punkte)

Betrachte das Bandbreitenspiel wie in der Vorlesung. Sei $s_i \in [b_{\min}, 1]$ das Gebot von Spieler i. Wir haben gesehen, dass der Nutzen von Spieler i definiert ist als

$$u_i(s_i, s_{-i}) \;=\; \alpha_i \cdot \frac{s_i}{\sum_{j=1}^{n} s_j} - s_i \quad .$$

a) Zeige dass $u_i(s_i, s_{-i})$ eine konkave Funktion in s_i ist. Was ist die beste Antwort von Spieler i auf s_{-i}?

b) Entwirf eine Funktion $f : [b_{\min}, 1]^n \to [b_{\min}, 1]^n$ und zeige mit dem Fixpunktsatz von Brouwer, dass im Bandbreitenspiel immer ein reines Nash-Gleichgewicht existiert.

Email: `mhoefer@cs.uni-frankfurt.de, Nakhe@em.uni-frankfurt.de`