Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Martin Hoefer, Paresh Nakhe

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Algorithmen und Komplexität
Institut für Informatik

Übung 7

Ausgabe: 06.05.2017
Abgabe: 13.06.2017

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und ***tackere*** *diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!*

Aufgabe 7.1. (2 + 2 Punkte)

a) Betrachte eine Ein-Gut-Auktion mit $n > 2$ Bietern. Wir nehmen an, alle Gebote sind verschieden – ansonsten nutzen wir ein konsistentes Tie-Breaking, um die Gebote in eine totale Reihenfolge zu bringen. Das Gut wird dem Bieter mit höchstem Gebot gegeben. Der Gewinner zahlt das kt-höchste Gebot für ein $k \in \{2, 3, 4, \ldots, n\}$. Die anderen Bieter zahlen nichts. Für welche Werte k ist dieser Mechanismus anreizkompatibel? Begründe Deine Antwort.

b) Betrachte eine Auktion mit zwei Gütern A und B, sowie drei Bietern. Bieter 1 hat Bewertung 1 für $\{A, B\}$, d.h. $v_1(AB) = 1$ und 0 sonst. Bieter 2 hat Bewertung 1, wenn er mindestens A bekommt, d.h. $v_2(AB) = v_2(A) = 1$ und 0 sonst. Bieter 3 hat Bewertung 1, wenn er mindestens B bekommt, d.h. $v_1(AB) = v_1(B) = 1$ und 0 sonst. Gib die VCG Zuweisung und Zahlungen (mit Clarke-Rule) in den Fällen an wenn (1) nur Bieter 1 und 2 teilnehmen; und (2) wenn alle drei Bieter teilnehmen. Wie verändert sich die Summe aller Zahlungen im VCG Mechanismus? Begründe Deine Antwort.

Aufgabe 7.2. (2 + 3 + 4 Punkte)

Wir betrachten ein Kommunikationsnetzwerk, repräsentiert durch einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. In G ist jede Kante e im Besitz eines Agenten a_e. Die Firma TreeComm möchte nun eine Teilmenge T der Kanten nutzen, um ein zusammenhängendes Netzwerk aufzubauen. Den Kanten in T entstehen dadurch private Kosten c_e. Jeder Agent a_e kann einen (beliebigen) Kostenwert $c_e \geq 0$ an TreeComm mitteilen. Basierend auf diesen berichteten Kosten kauft TreeComm einen minimalen Spannbaum T^*, der $\sum_{e \in T^*} c_e$ minimiert. TreeComm zahlt jedem Agenten A_e mit $e \in T^*$ einen Geldbetrag $p_e \geq 0$ (sowie $p_e = 0$ wenn $e \notin T^*$). Wir nehmen an, dass in G mindestens zwei kantendisjunkte Spannbäume existieren.

Bitte wenden!

- Gibt es Zahlungen p_e, so dass der Mechanismus anreizkompatibel wird?

- TreeComm merkt, dass für jede Kante sowieso einen gewisser Grundbetrag an Aufwendungen anfällt. Daher möchte man doch lieber einen Spannbaum T_1^* kaufen, der $\sum_{e \in T_1^*} \max\{10, c_e\}$ minimiert. Gibt es Zahlungen, so dass der Mechanismus anreizkompatibel wird?

- Nach der Aufsichtsratssitzung hat man sich nochmal umentschieden – der Aufsichtsrat hat Zielkosten vorgegeben, an denen sich die Netzwerkkosten orientieren sollen. TreeComm möchte nun einen Spannbaum T_2^* kaufen, der $\left(1000 - \sum_{e \in T_2^*} c_e\right)^2$ minimiert. Gibt es Zahlungen, so dass der Mechanismus anreizkompatibel wird?

Begründe Deine Antworten.

Aufgabe 7.3. *Semi-smoothness* (4 + 2 + 4* Punkte)

In der Vorlesung haben wir Spiele gesehen, für die die *Smoothness*-Eigenschaft nicht zu guten Schranken für den PoA führt. Es gibt allerdings noch stärkere Varianten, um Schranken auf den PoA zu beweisen. In dieser Übung betrachten wir das Max-Cut-Spiel:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Jeder Knoten $v \in V$ ist ein Spieler. Die Kanten repräsentieren Paare von Spielern, die sich nicht mögen. Es gibt zwei Vereine, und jeder Spieler muss einem Verein beitreten. Der Nutzen von Spieler i ist die Anzahl seiner Nachbarn in G, die im anderen Verein sind.

Der soziale Nutzen in Zustand s ist $u(s) = \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(s)$. Der Preis der Anarchie ist der maximale Nutzen $u(s^*)$ durch den schlechtesten (erwarteten) sozialen Nutzen im Gleichgewicht.

Definition 1 (Semi-Smoothness)**.** *Ein Nutzenmaximierungspiel ist* (λ, μ)-semi-smooth*, wenn für jeden Spieler i eine gemischte Strategie σ_i existiert, so dass für jeden Zustand s und jeden optimalen Zustand s^* gilt*

$$\mathbb{E}_\sigma\left[\sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(\sigma_i, s_{-i})\right] \geq \lambda \cdot u(s^*) - \mu \cdot u(s).$$

a) Zeige, dass das Max-Cut Spiel $(1/2, 0)$-semi-smooth ist.
Hinweis: Was passiert, wenn die Spieler die Vereine mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ wählen?

b) Benutze die Semi-Smoothness-Eigenschaft um zu beweisen, dass der Preis der Anarchie für grob-korrelierte Gleichgewichte im Max-Cut-Spiel höchstens 2 ist.

c) Bonus: Zeige, dass das Max-Cut-Spiel nicht (λ, μ)-smooth ist mit $\frac{\lambda}{1+\mu} > \frac{1}{3}$.

Email: `mhoefer@cs.uni-frankfurt.de, Nakhe@em.uni-frankfurt.de`