Algorithmische Spieltheorie
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Martin Hoefer, Paresh Nakhe

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Algorithmen und Komplexität
Institut für Informatik

Übung 8

Ausgabe: 14.06.2017
Abgabe: 27.06.2017

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und **tackere** *diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!*

Aufgabe 8.1. *Auktionen mit Ertragsziel* (2 + 3 + 3 Punkte)

Betrachte eine Auktion mit k identischen Gütern bei der jeder Bieter nur ein Gut möchte. Der Verkäufer hat einen Zielwert $R \geq 0$ für seinen Ertrag. Der Mechanismus läuft wie folgt ab:

Frage die Gebote $b_1, \ldots, b_n$ ab.
Initialisiere Menge S mit den k höchsten Bietern, und setze Zahlungen $p_i = 0$ für alle $i \in [n]$.
while *ein Bieter* $i \in S$ *mit* $b_i < R/|S|$ *existiert* **do**
  Entferne einen beliebigen solchen Bieter aus S.
if $S \neq \emptyset$ **then**
  for *jeden Bieter* $i \in S$ **do**
    Weise i ein Gut zu und setze die Zahlung $p_i = R/|S|$.

---

a) Gib eine formale Beschreibung der Zuweisungsregel an und zeige, dass sie monoton ist.

b) Benutze Myersons Lemma um zu zeigen, dass diese Auktion anreizkompatibel ist.

c) Zeige: Wenn irgendeine normalisierte anreizkompatible Auktion einen Ertrag von mindestens R erzielt, dann erzielt auch die obige Auktion einen Ertrag von mindestens R.

Aufgabe 8.2. *Ertragskurve* (2 + 3 + 2 Punkte)

In dieser Übung leiten wir eine andere Interpretation für virtuelle Werte her. Betrachte eine Ein-Gut-Auktion mit einen einzelnen Bieter. Der Wert des Bieters ist beschrieben durch die Verteilung $\mathcal{V}$ über dem Intervall $[0, v_{max}]$ (mit $v_{max} < +\infty$). Die Verteilungsfunktion F ist streng monoton steigend und die Dichte f strikt positiv auf $[0, v_{max}]$. Für $q \in [0, 1]$ sei $V(q) = F^{-1}(1 - q)$ der Fixpreis, bei dem das Gut mit Wahrscheinlichkeit q verkauft wird. Sei $R(q) = q \cdot V(q)$ der erwartete Ertrag wenn die Verkaufswahrscheinlichkeit q ist. Die Funktion $R(q)$ mit $q \in [0, 1]$ wird auch *Ertragskurve* von Verteilungsfunktion F genannt.

Bitte wenden!

a) Was ist die Ertragskurve für die uniforme Verteilung auf $[0, 1]$?

b) Zeige, dass die Ableitung der Ertragskurve nach q genau der virtuelle Wert $\varphi(V(q))$ ist.

c) Zeige, dass $\mathcal{V}$ genau dann regulär ist wenn die Ertragskurve konkav ist.

Aufgabe 8.3. *Bulow-Klemperer* (3 + 2 Punkte)

a) Betrachte eine Ein-Gut-Auktion mit n Bietern. Jeder Bieter bekommt einen Wert unabhängig aus der gleichen regulären Verteilung $\mathcal{V}$. Betrachte die Zahlungen p einer Vickrey-Zweitpreisauktion (ohne Reservationspreis) und die Zahlungen p^* des optimalen Mechanismus (mit den gleichen n Bietern). Zeige die folgende Beziehung:

$$\mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}^n}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(v)\right] \quad \geq \quad \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}^n}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i^*(v)\right] \quad .$$

b) Betrachte die VCG-Auktion mit k identischen Gütern, wenn jeder Bieter nur ein Gut möchte (gib den k höchsten Bietern jeweils ein Gut, jeder zahlt das $(k+1)$-höchste Gebot). Können wir den Satz von Bulow-Klemperer auf diesen Fall erweitern? Wenn ja, wie viele zusätzliche Bieter x bräuchte man, damit mit VCG-Auktion mit $n+x$ Bietern mindestens den erwarteten Ertrag des optimalen Mechanismus mit n Bietern garantiert?

Aufgabe 8.4. *Greedy-Mechanismen für kombinatorische Auktionen* (3+4+3 Punkte)

Betrachte Versionen des Greedy-Algorithmus für kombinatorische Auktionen mit Single-Minded-Bewertungen. Sie nutzen andere Ordnungen (mit konsistentem Tie-Breaking), in der sie die Bieter zur Menge der Gewinner hinzufügen.

- $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_n$
- $\frac{v_1}{|S_1|} \geq \frac{v_2}{|S_2|} \geq \ldots \geq \frac{v_n}{|S_n|}$
- $|S_1| \geq |S_2| \geq \ldots \geq |S_n|$

a) Für welche dieser Ordnungen kann man aus dem Greedy-Algorithmus einen anreizkompatiblen Mechanismus machen und warum?

b) Zeigen Sie eine Schranke auf den Approximationsfaktor in der Anzahl m der Güter oder geben Sie ein Gegenbeispiel an, dass eine solche Schranke nicht existiert.

c) Geben sie jeweils ein Beispiel an, in dem ihre Schranke aus b) erreicht wird (wenn sie existiert).

Email: `mhoefer@cs.uni-frankfurt.de, Nakhe@em.uni-frankfurt.de`