Entwurf anreizkompatibler Mechanismen

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2018

Mechanismen und Geld

- Menge A von möglichen Ergebnissen.
- Ziel: Wähle ein Ergebnis $a \in A$.
- Spieler haben quantifizierbare Präferenzen über die Ergebnisse. Gemeinsame Währung ermöglicht Nutzentransfer zwischen Spielern.
- Präferenz von Spieler i wird beschrieben durch eine Bewertungsfunktion $v_i : A \to \mathbb{R}$ aus einer bekannten Menge von Funktionen $V_i \subseteq \mathbb{R}^A$.
- v_i ist private Information von Spieler i.
- Mechanismus zur Wahl eines Ergebnisses:
  1. Frage die Bewertungen aller Spieler ab (direkte Offenlegung)
  2. Bestimme ein Ergebnis $a \in A$
  3. Bestimme Zahlungen m_i für jeden Spieler i
- Nutzen oder Utility von Spieler i ist $v_i(a) - m_i$. Nutzen ist quasi-linear.

Beispiel: Sealed-Bid Auktion

Ein einzelner Gegenstand wird an einen Bieter verkauft.

Bieter	1	2	3	4	5
Wert	9	1	20	11	14

Bieter teilen ihren Wert am Anfang mit durch ein "versiegeltes" Gebot.
Ergebniswahl: Gewinner ist Teilnehmer mit höchstem Gebot.
Zahlungen: Bestimme Zahlungen für ehrliches Verhalten

- Keine Zahlungen: Bieter versuchen unbeschränkt hohe Gebote abzugeben.
- Zahlung = Gebot: Bieter mit höchstem Wert versucht, das zweithöchste Gebot zu erraten und ein wenig höher zu bieten.

Vickreys Zweitpreis-Auktion

Zahlung des Siegers ist das zweithöchste Gebot.

Wert	9	1	20	11	14
Zahlung	0	0	14	0	0
Nutzen	0	0	6	0	0

Ein Mechanismus heißt anreizkompatibel wenn für jeden Bieter i und alle Gebote anderer Bieter eine ehrliche Offenlegung immer maximalen Nutzen für i liefert.

Proposition

Die Vickrey-Auction ist anreizkompatibel.

Beispiel

Wert	?	?	20	?	?
Gebot	5	11	x	2	14
Zahlung			14		
Nutzen			6		

Fall 1: i gewinnt mit ehrlichem Gebot $x = 20$, dann hat er für alle $x \geq 14$ Nutzen 6; für $x < 14$ Nutzen 0.

Wert	?	?	20	?	?
Gebot	5	11	x	2	24
Zahlung			0		
Nutzen			0		

Fall 2: i verliert mit ehrlichem Gebot $x = 20$, dann hat er für alle $x < 24$ Nutzen 0; für $x \geq 24$ Nutzen -4.

Definitionen

Mechanismen mit direkter Offenlegung

- Notation: $V = V_1 \times \ldots \times V_n$ und $v \in V$
- $v = (v_1, \ldots, v_n)$, v_i ist Typ von Bieter i
- Bieter "bietet": Teilt einen Typ an den Mechanismus mit
- Ergebnisfunktion $f : V \to A$, Zahlungsfunktionen $p_1, \ldots, p_n$
- $p_i : V \to \mathbb{R}$ gibt die Zahlungen an, die Bieter i leisten muss.

Anreizkompatibilität (engl: incentive compatibility (IC))

- Betrachte jeden Bieter i, jede Bewertung $v \in V$, und jede alternative Bewertung $v_i' \in V_i$.
- Wir schreiben für die Ergebnisse $a = f(v_i, v_{-i})$ und $b = f(v_i', v_{-i})$
- Mechanismus $(f, p_1, \ldots, p_n)$ ist anreizkompatibel wenn der Nutzen

$$v_i(a) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(b) - p_i(v_i', v_{-i})$$

.

Sealed-Bid Auktion

Bieter	1	2	3	4	5
Wert	9	1	20	11	14

- Ergebnisse $A = \{1,2,3,4,5\}$, wobei i bedeutet "i gewinnt"

Ergebnis	1	2	3	4	5
v_1	9	0	0	0	0
v_2	0	1	0	0	0
etc.					

- Ergebniswahl: $f(v) = \arg\max_i\{v_i(i)\}$
- Zahlungen: $p_i(v) = 0$ wenn $f(v) \neq i$, sonst $p_i(v) = \max_{j \neq i} v_j(j)$.

VCG Mechanismus

Definition

Ein Vickrey-Clarke-Groves (VCG) Mechanismus ist gegeben durch

- $f(v) \in \arg\max_{a \in A} \sum_i v_i(a)$; und
- es gilt für jedes $v \in V$ und jeden Bieter i

$$p_i(v) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v)) \quad ,$$

mit $h_1, \ldots, h_n$ beliebigen Funktionen $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$.

Beobachtungen:

- VCG Mechanismus wählt ein Ergebnis a, das den sozialen Nutzen $\sum_j v_j(a)$ maximiert
- h_i hängt nicht vom eigenen "Gebot" v_i ab
- Nutzen von Bieter i bei $f(v) = a$ beträgt:

$$v_i(a) - p_i(v) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$$

VCG ist IC

Satz

Jeder VCG-Mechanismus ist anreizkompatibel.

Beweis:

- Für Bewertungen v, sei $v_i' \neq v_i$ eine "Lüge" für Bieter i
- Sei $a = f(v)$ und $b = f(v_i', v_{-i})$
- Nutzen von i wenn er v_i mitteilt: $\quad v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - h_i(v_{-i})$
- Nutzen von i wenn er v_i' mitteilt: $\quad v_i(b) + \sum_{j \neq i} v_j(b) - h_i(v_{-i})$
- Nutzen wird maximiert wenn Ergebnis sozialen Nutzen $\sum_j v_j(x)$ maximiert.
- VCG Mechanismus maximiert sozialen Nutzen, $\sum_j v_j(a) \geq \sum_j v_j(b)$.
- Wenn Bieter i v_i' mitteilt, dann wählt VCG b. b gibt optimalen sozialen Nutzen wenn i lügt, aber evtl. suboptimalen echten Nutzen.
- VCG passt die Anreize der Bieter an den sozialen Nutzen an. $\square$

Eigenschaften der Zahlungen

Definition

- Ein Mechanismus ist (ex-post) individuell rational wenn die Bieter immer nicht-negativen Nutzen erhalten. Für alle $v \in V$ und jeden Bieer i gilt $v_i(f(v)) - p_i(v) \geq 0$.
- Ein Mechanismus macht keine positiven Transfers wenn kein Bieter jemals Geld ausgezahlt bekommt. Für alle $v \in V$ und jeden Bieter i gilt $p_i(v) \geq 0$.

Definition (Clarke-Regel)

Die Funktion $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ heißt Clarke-Pivot-Regel.

Clarke Regel

Mit der Clarke-Regel ergeben sich die Zahlungen von Bieter i als

$$p_i(v) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v)) \quad .$$

Die Zahlung ist der "Gesamtschaden", den alle anderen Bieter in ihren Bewertungen des Ergebnisses erfahren durch die Anwesenheit von i. Jeder Bieter *internalisiert die Externalitäten*.

Lemma

Ein VCG Mechanismus mit Clarke-Regel macht keine positiven Transfers. Wenn $v_i(a) \geq 0$ *für alle* $v_i \in V_i$ *und* $a \in A$, *dann ist der Mechanismus individuell rational.*

Clarke Regel

Beweis:

- Seien $a = f(v)$ und $b = \arg\max_{a' \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a')$
- Keine positiven Transfers (per Definition)

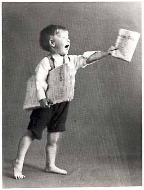
$$\sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq 0$$

- Individuell rational:

$$v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(b) \geq \sum_{j} v_j(a) - \sum_{j} v_j(b) \geq 0$$

$\square$

Beispiel: Bilateraler Handel



	Handel	kein Handel
Verkäufer	$-v_s$	0
Käufer	v_b	0

- Handel findet statt wenn $v_b > v_s$, kein Handel wenn $v_s > v_b$
- Analysiere VCG Mechanismus – er sollte den Handel nicht subventionieren.

Beispiel: Bilateraler Handel

	Handel	kein Handel
Verkäufer	$-v_s$	0
Käufer	v_b	0

- VCG Zahlungen für keinen Handel:
  Zahlungen Verkäufer: $h_s(v_b) - 0$, Zahlungen Käufer: $h_b(v_s) - 0$
  Keine zusätzlichen Zahlungen durch den Mechanismus, daher $h_s(v_b) = h_b(v_s) = 0$.
- VCG Zahlungen für Handel:
  Zahlungen Verkäufer: $h_s(v_b) - v_b$, Zahlungen Käufer: $h_b(v_s) + v_s$
  Verkäufer bekommt v_b, aber Käufer zahlt nur $v_s < v_b$.
- Kein *balanciertes Budget*: VCG Mechanismus subventionert den Handel!

Beispiel: Rückwärts-Auktion

- Auktionator kauft einen Service
- Jeder Teilnehmer bietet den Service an und hat interne Kosten
- Auktionator bezahlt die Teilnehmer
- Negativer Nutzen, negative Zahlungen
- Vickrey-Rückwärts-Auktion:
  Gewinner ist Teilnehmer mit niedigstem Gebot
  Zahlung an den Gewinner ist zweitniedrigstes Gebot

Korollar

Die Vickrey-Rückwärts-Auktion ist anreizkompatibel.

Vickrey-Rückwärts-Auktion ist IC

Fall 1: Mit ehrlichem Gebot gewinnt Bieter i.

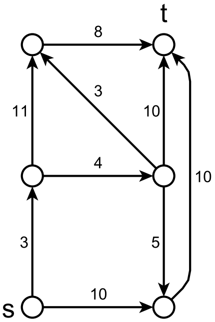
Wert	?	?	-7	?	?
Gebot	-9	-11	x	-17	-14
Zahlung			-9		
Nutzen			2		

Fall 2: Mit ehrlichem Gebot verliert Bieter i.

Wert	?	?	-12	?	?
Gebot	-9	-11	x	-17	-24
Zahlung			0		
Nutzen			0		

Beispiel: Kaufen eines Pfades im Netzwerk

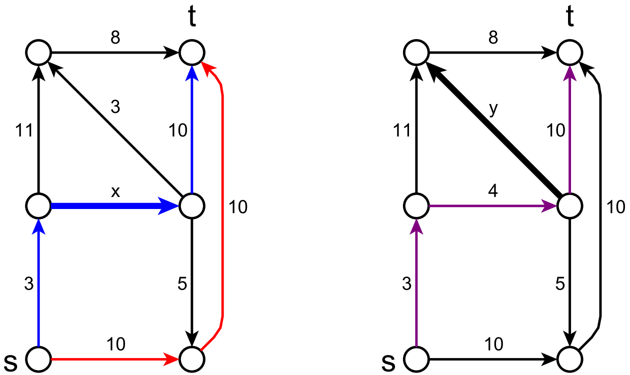
Rückwärts-Auktion:
Teilnehmer sind die Kanten in einem Netzwerk. Jede Kante e hat einen privaten Kostenwert c_e. Auktionator kauft einen s-t-Pfad.



Beispiel: Kaufen eines Pfades im Netzwerk

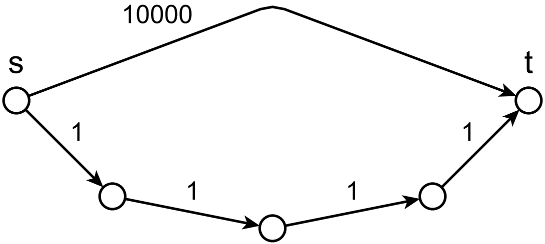
- Ergebnisse sind s-t-Pfade im Graph G
- VCG wählt günstigsten Pfad P^* bzgl. der mitgeteilten Kantenkosten c_e, also besten Pfad bzgl. der Werte $v_e = -c_e$.
- Zahlung der Kante $e \in P^*$ an den Mechanismus: $h_e(c_{-e}) - \sum_{e' \in P^*, e' \neq e} -c_{e'} = h_e(c_{-e}) + c(P^* - e)$
- Wir nutzen hier $h_e(c_{-e}) = \max_{P \in G-e} \sum_{e \in P} -c_e = -c(P^*_{-e})$, wobei P^*_{-e} ein kürzester s-t-Pfad wenn G die Kante e nicht enthalten würde. Diese Wahl für h_e ist nicht exakt die Clarke-Regel (Warum?)
- Gesamte Zahlung der Kante $e \in P^*$ is also $c(P^* - e) - c(P^*_{-e}) \leq 0$, d.h. die Kante bekommt Zahlung vom Mechanismus.
- Kante $e \notin P^*$ hat Kosten 0 und erhält keine Zahlungen.

Sag-die-Wahrheit ist eine dominante Strategie!



Frugalität

VCG ist anreizkompatibel, aber evtl. extrem TEUER!



Noch mehr anreizkompatible Mechanismen?

VCG-Mechanismus ist anreizkompatibel und maximiert sozialen Nutzen f.

Welche anderen Ergebnisfunktionen f können wir *implementieren*, d.h. durch Zahlungen in anreizkompatible Mechanismen verwandeln?

Gibt es noch andere Arten von anreizkompatiblen Mechanismen außer VCG?

Direkte Charakterisierung

Proposition

Ein Mechanismus ist anreizkompatibel genau dann wenn für jeden Bieter i und jedes v_{-i} gilt:

1. *Die Zahlung p_i hängt nicht von v_i ab, sondern nur vom Ergebnis – d.h. es gibt Preise $p_a(v_{-i}) \in \mathbb{R}$ so dass für jedes v_i mit $f(v_i, v_{-i}) = a$ gilt $p_i(v_i, v_{-i}) = p_a(v_{-i})$.*
2. *Der Mechanismus optimiert den Nutzen für jeden Bieter – d.h. für jedes v_i gilt $f(v_i, v_{-i}) \in \arg\max_{a \in A'} \{v_i(a) - p_a\}$, wobei A' die Menge der möglichen Ergebnisse für $f(\cdot, v_{-i})$.*

Beweis:

Offensichtlich: Bedingungen erfüllt $\Rightarrow$ Anreizkompatibel.

Beweis Direkte Charakterisierung

1. Zahlung $p_i = p_a$ hängt nicht ab von v_i, nur vom Ergebnis $a = f(v_i, v_{-i})$.
2. Mechanismus optimiert für jeden Bieter.

Anreizkompatibel $\Rightarrow$ Bedingungen erfüllt:

- Bedingung 1:
  $v_i \neq v_i'$ ergeben gleiches Ergebnis bei festem v_{-i}. Zahlung $p_i(v_i, v_{-i}) > p_i(v_i', v_{-i})$, dann will Bieter i mit v_i lieber lügen und v_i' mitteilen.
- Bedingung 2:
  Falls nicht, dann gibt es besseres Ergebnis $a' \in \arg\max_a(v_i(a) - p_a)$ und ein v_i' mit $a' = f(v_i', v_{-i})$. Also will Bieter i lieber lügen und v_i' mitteilen. $\square$

Affiner Maximierer

Definition

Eine Ergebnisfunktion f ist ein affiner Maximierer wenn es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, Bietergewichte $w_1, \ldots, w_n \geq 0$ und Ergebnisgewichte $c_a \in \mathbb{R}$ für jedes $a \in A'$ gibt, so dass

$$f(v_1, \ldots, v_n) \in \arg\max_{a \in A'} \left\{ c_a + \sum_i w_i v_i(a) \right\}.$$

Proposition

Sei f ein affiner Maximierer, und sei h_i eine beliebige Funktion unabhängig von v_i. Bieter i mit $w_i = 0$ zahlt $p_i(v) = 0$. Bieter i mit $w_i > 0$ zahlt

$$p_i(v) = h_i(v_{-i}) - \frac{1}{w_i} \left(\sum_{j \neq i} w_j v_j(a) + c_a \right) .$$

Dann ist $(f, p_1, \ldots, p_n)$ anreizkompatibel.

(Nur) Affine Maximierer sind anreizkompatibel

Beweis:

- Für $w_i = 0$ hat i keinen Einfluß auf den Mechanismus.
- Mit $p_i = 0$ gleicher Nutzen für jedes Gebot von i.
- Für $w_i > 0$ sei oBdA $h_i = 0$. Nutzen von i wenn a gewählt wird:

$$v_i(a) + \frac{1}{w_i}\left(\sum_{j \neq i} w_j v_j(a) + c_a\right).$$

- Multipliziere mit $w_i > 0$, Ausdruck maximal wenn $c_a + \sum_j w_j v_j(a)$ maximal.
- f affiner Maximierer, wahrer Typ ist dominante Strategie für i. $\square$

Satz (Roberts 1979)

Seien $|A| \geq 3$, f bildet voll auf A ab, $V_i = \mathbb{R}^A$ für jeden Bieter i, und $(f, p_1, \ldots, p_n)$ anreizkompatibel. Dann ist f ein affiner Maximierer.

"Zeugs mal Wert"-Bewertungen

Im Single-Parameter-Fall haben die Bewertungen eine einfache Struktur.

- In Ergebnis $a \in A$ erhält Bieter i eine Menge von "Zeugs"
- Sei $x_i(a) \in \mathbb{R}$ die Menge an "Zeugs", die Bieter i in Ergebnis a erhält
- Bewertung mit einzelnem privaten Parameter:

  Wert pro Einheit Zeugs: $t_i \in \mathbb{R}$
  Bewertungsfunktion: $v_i(a) = t_i \cdot x_i(a)$

Definition

Ein Single-Parameter Bereich V_i ist gegeben durch (öffentlich bekannte) Funktion $x_i : A \to \mathbb{R}$ und Wertebereich $[t_i^0, t_i^1]$. Die Menge V_i enthält alle v_i so dass für ein $t_i^0 \leq t_i \leq t_i^1$ gilt

$$v_i(a) = t_i \cdot x_i(a) \quad .$$

Wir überladen die Notation: v_i bezeichnet sowohl Funktion als auch Parameter.

Beispiele

Einfache Beispiele:

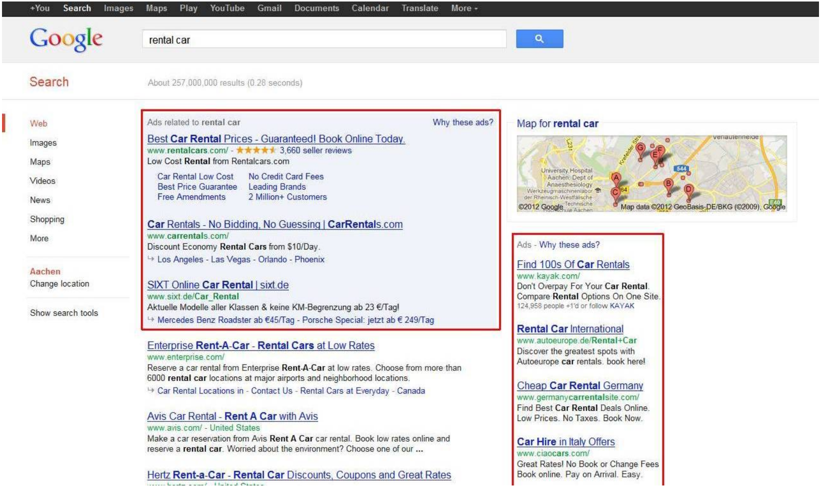
- Ein-Gut-Auktion: $x_i(a) \in \{0,1\}$ und $\sum_i x_i(a) \leq 1$.
- k identische Güter: $x_i(a) \in \{0,1,\ldots,k\}$ und $\sum_i x_i(a) \leq k$.
- s-t-Pfad: $x_e(a) \in \{0,1\}$ und $P(x) = \{e \mid x_e(a) = 1\}$ ist s-t-Pfad in G.

Sponsored-Search-Auktion

- Eine Webseite mit Suchresultaten hat mehrere Slots für Werbeanzeigen
- Suchmaschine versteigert diese Anzeigeslots an Werbekunden
- Slot k hat eine bekannte Anklickrate $\alpha_k \geq 0$
- Firma i hat privaten Wert v_i pro Klick auf ihre Anzeige
- Im Ergebnis $a \in A$ werden Anzeigenslots an Firmen zugewiesen
- $x_i(a) = \alpha_k$ wenn Firma i einen Slot k erhält, sonst $x_i(a) = 0$
- Bewertung der Firma $v_i(a) = v_i \cdot x_i(a)$

Gibt es anreizkompatible Mechanismen, die keine affinen Maximierer sind?

Sponsored-Search-Auktionen



Beispiel: Zweithöchstes Gebot gewinnt

Wir versteigern ein einzelnes Gut und geben es dem zweithöchsten Bieter. Gibt es Zahlungen, mit denen der Mechanismus anreizkompatibel wird?

Betrachte einen Bieter i und fixiere die anderen Gebote v_{-i}.

Es gilt $x_i(a) \in \{0,1\}$. Direkte Charakterisierung zeigt: i zahlt immer nur p_i^1 oder p_i^0, je nachdem ob er zweithöchster Bieter ist oder nicht.

Sei y ein Gebot, mit dem i zweithöchster Bieter wird, und z eines mit dem er höchster Bieter wird, mit $y < z$.

Wenn $v_i = y$ soll i nicht z lügen, also: $y \cdot 1 - p_i^1 \geq y \cdot 0 - p_i^0$.
Wenn $v_i = z$ soll i nicht y lügen, also: $z \cdot 0 - p_i^0 \geq z \cdot 1 - p_i^1$.

Daraus folgt $y \geq z$, ein Widerspruch.

Es gibt keine Zahlungen, so dass der Mechanismus anreizkompatibel wird. Die Ergebnisfunktion ist nicht monoton – ein höheres Gebot kann die Menge an erhaltenem Zeugs verringern.

Monotonie

Definition

Eine Ergebnisfunktion f für Single-Parameter Bereiche $V_1, \ldots, V_n$ ist monoton in v_i wenn für jedes v_{-i} und jedes $v_i' \in V_i$ mit $v_i' \geq v_i$ gilt

$$x_i(f(v_i', v_{-i})) \quad \geq \quad x_i(f(v_i, v_{-i})) \ .$$

Normalisierter Mechanismus: Beim kleinsten Gebot t_i^0 bekommt Bieter i nie Zeugs und zahlt nichts, d.h. $x_i(t_i^0, v_{-i}) = 0$ und $p_i(t_i^0, v_{-i}) = 0$ für alle v_{-i}.

Charakterisierung

Satz (Myersons Lemma)

Ein normalisierter Mechanismus $(f, p_1, \ldots, p_n)$ *für Single-Parameter Bereiche ist anreizkompatibel genau dann wenn die folgenden Bedingungen gelten:*

- *Die Ergebnisfunktion* f *ist monoton in jedem* v_i
- *Die Zahlungen sind gegeben durch*

$$p_i(v_i, v_{-i}) = v_i \cdot x_i(f(v)) - \int_{t_i^0}^{v_i} x_i(f(t, v_{-i}))dt.$$

Beweis:

Fixiere v_{-i}. Seien $y < z$ zwei mögliche private Werte von i. Wir schreiben $a_y = f(y, v_{-i})$ und $a_z = f(z, v_{-i})$.

Beweis Myersons Lemma

Anreizkompatibel bedeutet:

$$y \cdot x_i(a_y) - p_i(a_y) \geq y \cdot x_i(a_z) - p_i(a_z) \tag{1}$$

und

$$z \cdot x_i(a_z) - p_i(a_z) \geq z \cdot x_i(a_y) - p_i(a_y) \tag{2}$$

Summiere (1) und (2) und stelle um:

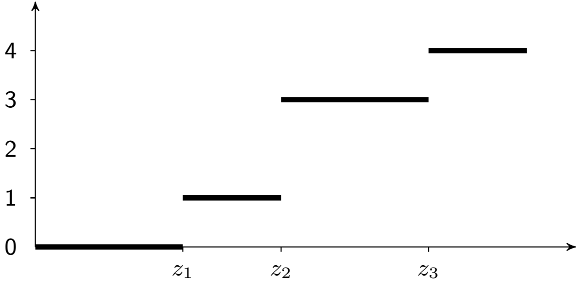
$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \geq y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Da $z > y$, folgt $x_i(a_z) \geq x_i(a_y)$, also f monoton ist notwendig.

Ist f monoton auch hinreichend? Wenn f monoton, dann müssen die Zahlungen zumindest genau wie in der Formel sein – wir beweisen das nur im Spezialfall für $x_i(a) \in \mathbb{N}$.

Beweis Myersons Lemma

Sei x_i monoton und $x_i(a) \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$, eine Treppenfunktion. x_i springt bei $z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_\ell$ um $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$, wobei $\sum_{j=1}^{\ell} k_j \leq k$.



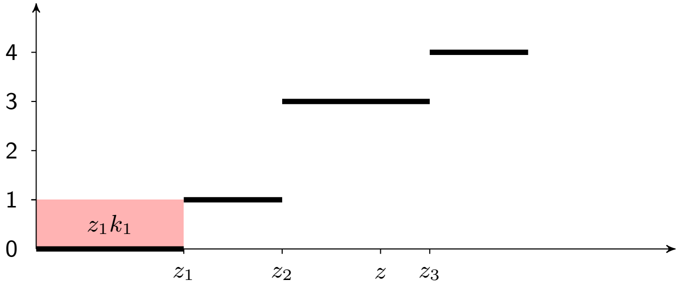
Beweis Myersons Lemma

(1) und (2) liefern

$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \quad \geq \quad p_i(a_z) - p_i(a_y) \quad \geq \quad y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Also ist $p_i(a_z) = p_i(a_y)$ wenn $x_i(a_z) = x_i(a_y)$. Sei $z = z_i$ und $y = z_i - \varepsilon$, dann zeigt $\varepsilon \to 0$, dass p_i bei z_i um $z_i k_i$ springt. Damit

$$p_i(a_z) \quad = \quad \sum_{j : z_j \leq z} z_j k_j \quad = \quad z \cdot x_i(a_z) - \int_{t_i^0}^{z} x_i(a_t)dt \ .$$



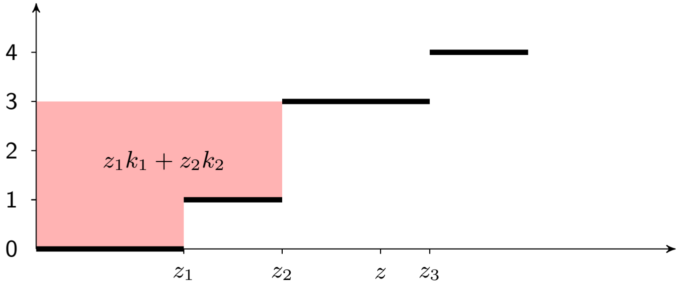
Beweis Myersons Lemma

(1) und (2) liefern

$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \quad \geq \quad p_i(a_z) - p_i(a_y) \quad \geq \quad y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Also ist $p_i(a_z) = p_i(a_y)$ wenn $x_i(a_z) = x_i(a_y)$. Sei $z = z_i$ und $y = z_i - \varepsilon$, dann zeigt $\varepsilon \to 0$, dass p_i bei z_i um $z_i k_i$ springt. Damit

$$p_i(a_z) \quad = \quad \sum_{j : z_j \leq z} z_j k_j \quad = \quad z \cdot x_i(a_z) - \int_{t_i^0}^{z} x_i(a_t)dt \ .$$



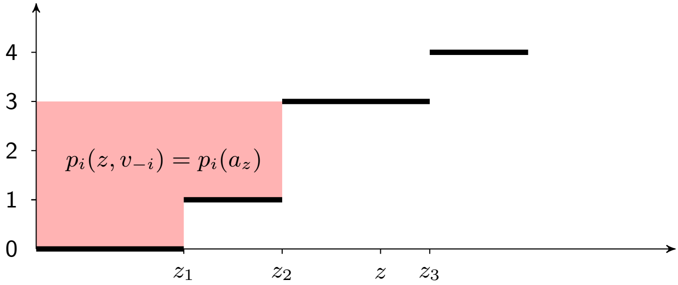
Beweis Myersons Lemma

(1) und (2) liefern

$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \quad \geq \quad p_i(a_z) - p_i(a_y) \quad \geq \quad y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Also ist $p_i(a_z) = p_i(a_y)$ wenn $x_i(a_z) = x_i(a_y)$. Sei $z = z_i$ und $y = z_i - \varepsilon$, dann zeigt $\varepsilon \to 0$, dass p_i bei z_i um $z_i k_i$ springt. Damit

$$p_i(a_z) \quad = \quad \sum_{j : z_j \leq z} z_j k_j \quad = \quad z \cdot x_i(a_z) - \int_{t_i^0}^{z} x_i(a_t) dt \enspace .$$



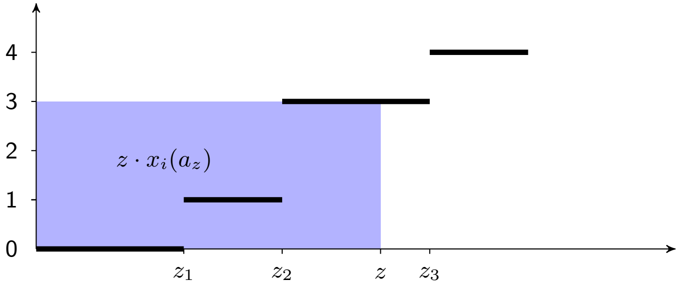
Beweis Myersons Lemma

(1) und (2) liefern

$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \quad \geq \quad p_i(a_z) - p_i(a_y) \quad \geq \quad y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Also ist $p_i(a_z) = p_i(a_y)$ wenn $x_i(a_z) = x_i(a_y)$. Sei $z = z_i$ und $y = z_i - \varepsilon$, dann zeigt $\varepsilon \to 0$, dass p_i bei z_i um $z_i k_i$ springt. Damit

$$p_i(a_z) \quad = \quad \sum_{j : z_j \leq z} z_j k_j \quad = \quad z \cdot x_i(a_z) - \int_{t_i^0}^{z} x_i(a_t) dt \ .$$



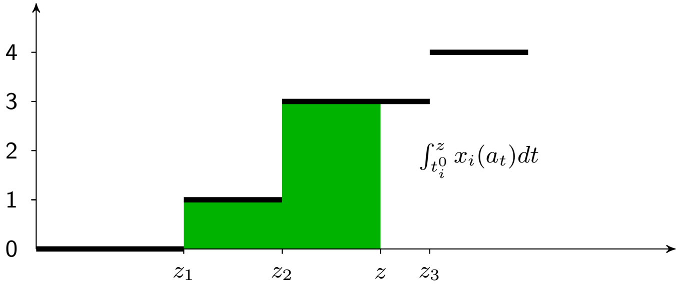
Beweis Myersons Lemma

(1) und (2) liefern

$$z \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y)) \quad \geq \quad p_i(a_z) - p_i(a_y) \quad \geq \quad y \cdot (x_i(a_z) - x_i(a_y))$$

Also ist $p_i(a_z) = p_i(a_y)$ wenn $x_i(a_z) = x_i(a_y)$. Sei $z = z_i$ und $y = z_i - \varepsilon$, dann zeigt $\varepsilon \to 0$, dass p_i bei z_i um $z_i k_i$ springt. Damit

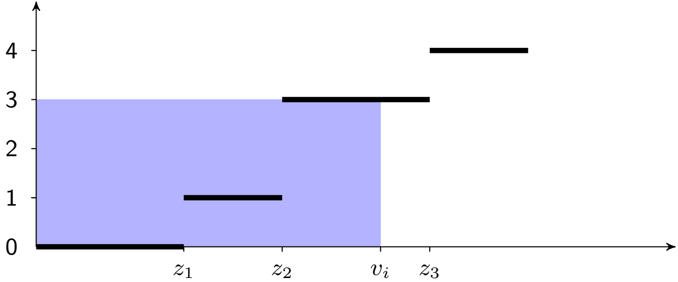
$$p_i(a_z) \quad = \quad \sum_{j: z_j \leq z} z_j k_j \quad = \quad z \cdot x_i(a_z) - \int_{t_i^0}^{z} x_i(a_t) dt \ .$$



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

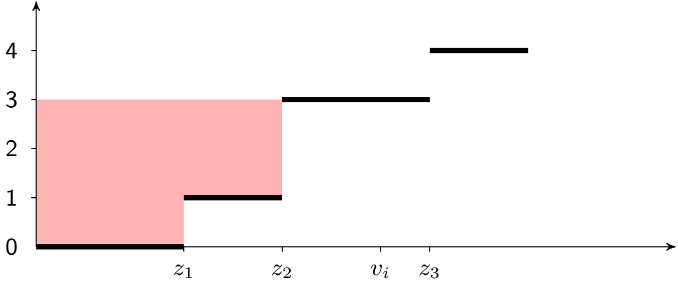
Bewertung bei wahrem Gebot:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

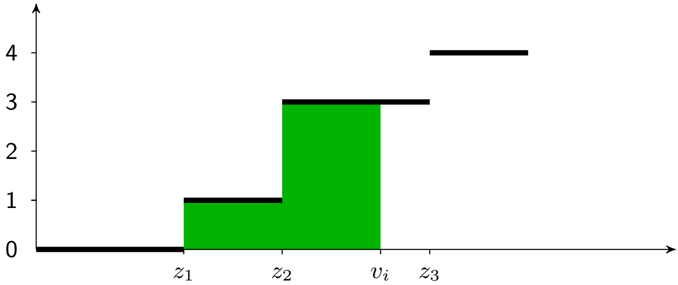
Zahlung bei wahrem Gebot:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

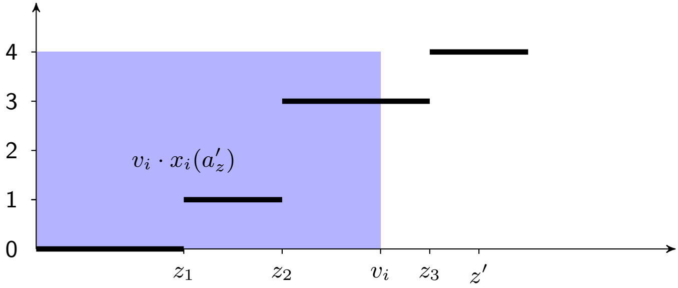
Nutzen bei wahrem Gebot:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

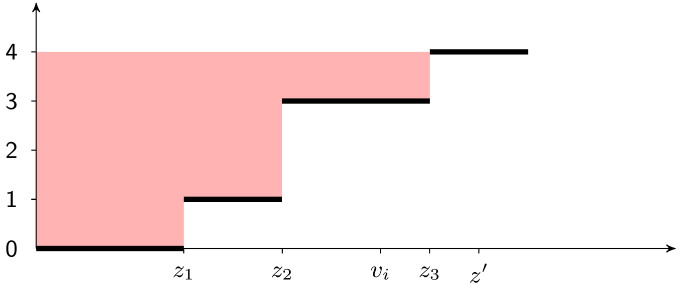
Bewertung bei Gebot $z' > v_i$:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

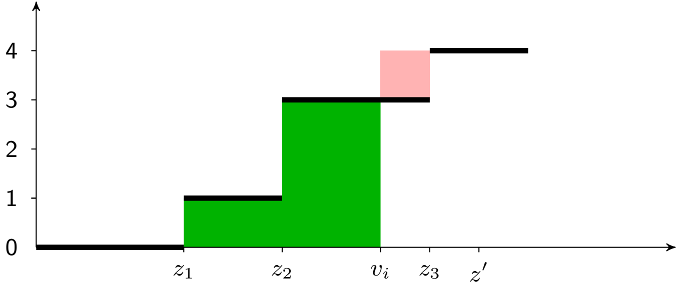
Zahlung bei Gebot $z' > v_i$:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

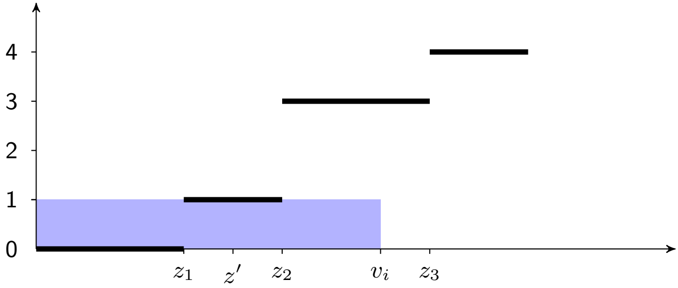
Nutzen bei Gebot $z' > v_i$ ist nicht besser!



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

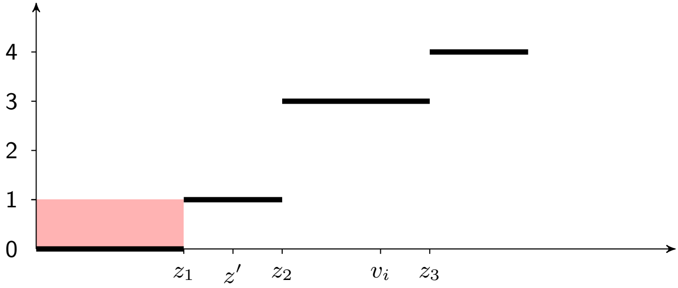
Bewertung bei Gebot $z' < v_i$:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

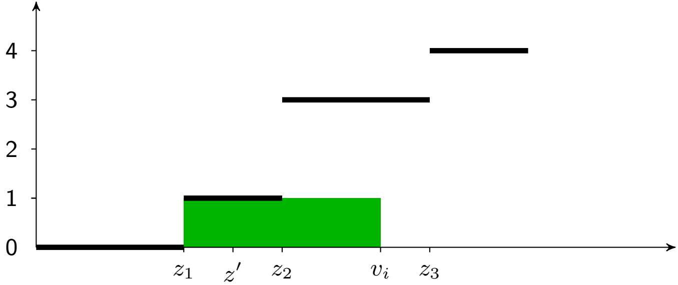
Zahlung bei Gebot $z' < v_i$:



Beweis Myersons Lemma

Das sind also die Zahlungen für die monotone Funktion f. Ist der Mechanismus nun wirklich immer anreizkompatibel, d.h. ist monotones f hinreichend?

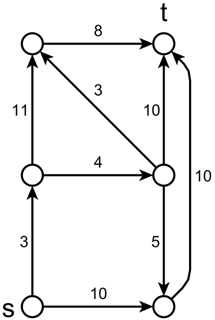
Nutzen bei Gebot $z' < v_i$ ist nicht besser!



□

Beispiel: Kaufen eines Pfades im Netzwerk (Teil 2)

Rückwärtsauktion und Min-Max-Pfade:
Teilnehmer sind die Kanten in einem Netzwerk. Jede Kante e hat einen privaten Kostenwert c_e. Auktionator kauft einen s-t-Pfad.

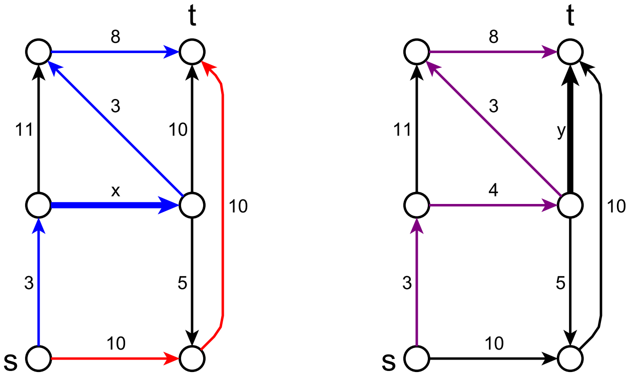


Der gekaufte Pfad P^* soll den maximalen Kostenwert einer Kante minimieren.

Min-Max ist monoton!

Verringert e sein Gebot, kann er nur in P^* kommen oder bleiben. Monotones $x_i(f(v_i, v_{-i})) \in \{0,1\}$, höchstens ein Treppenschritt. Anreizkompatibel:

$e \notin P^*$ erhält keine Zahlung.
$e \in P^*$ erhält maximale Kantenkosten auf Min-Max-Pfad in $G - \{e\}$



Mechanismen mit Kommunikation

Alle bisherigen Resultate betreffen Mechanismen mit direkter Offenlegung.

Kann man mit komplizierterer Kommunikation noch grundsätzlich andere Mechanismen entwerfen?

Zum Beispiel könnte ein Mechanismus in k Runden nacheinander jedem Bieter bestimmte Ja/Nein-Fragen stellen, und die Bieter müssten darauf reagieren. Oder ein Mechanismus würde in jeder Runde zwei Ergebnisse präsentieren und jeden Bieter fragen, welches Ergebnis er besser findet. Oder ein anderes Interaktionsprotokoll wird umgesetzt, oder...

Für allgemeine Kommunikation zwischen Mechanismus und Bieter i nehmen wir an, es gibt für jeden Bieter i eine Menge X_i von möglichen Aktionen, wobei jedes $x_i \in X_i$ eine Kollektion von Antworten darstellt, die Bieter i auf die Fragen des Mechanismus übermitteln kann.

Allgemeine Mechanismen mit Aktionsraum

Allgemeiner Mechanismus mit Aktionsraum:

- Aktionsraum X_i für Bieter i. Sei $X = X_1 \times \ldots \times X_n$.
- Eine Strategie $s_i : V_i \to X_i$ bildet die private Bewertung des Bieters $v_i \in V_i$ ab auf eine Aktion.
- Jeder Bieter i wählt eine Strategie s_i und damit eine Aktion $x_i = s_i(v_i)$.
- Ergebnisfunktion $g : X \to A$ bildet gewählte Aktionen auf Ergebnis ab
- Zahlungen $p_i : X \to \mathbb{R}$ abhängig von den gewählten Aktionen
- Quasi-linearer Nutzen: $u_i(x) = v_i(g(x)) - p_i(x)$

Bei direkter Offenlegung gilt $X_i = V_i$. Hier teilt ein Bieter mit seiner Strategie direkt seine (evtl. gelogene) Bewertung mit. Allgemein sind die Antworten X_i aber nicht unbedingt identisch mit den Bewertungen V_i. Mit der Strategie legt der Bieter für jede mögliche Bewertung fest, welche Antworten er dem Mechanismus gibt.

Revelationsprinzip

Sei nun Strategieprofil $s(v) = (s_1, \ldots, s_n)$ ein Gleichgewicht s in dominanten Strategien im allgemeinen Mechanismus. Sei $f(v) = g(s(v))$. Wir sagen der Mechanismus implementiert die Ergebnisfunktion f in dominanten Strategien.

Bei anreizkompatiblen Mechanismen mit direkter Offenlegung ist Sag-die-Wahrheit für jeden Bieter eine dominante Strategie. Formal gibt es in solchen Mechanismen also ein Gleichgewicht s in dominanten Strategien mit $s_i(v_i) = v_i$ für alle $v_i \in V_i$ und alle Bieter i.

Das Revelationsprinzip sagt, dass man durch komplizierte Kommunikation keine grundsätzlich anderen Mechanismen mit dominanten Strategien erzeugen kann. Wir können uns also weiterhin auf Mechanismen mit direkter Offenlegung konzentrieren.

Revelationsprinzip

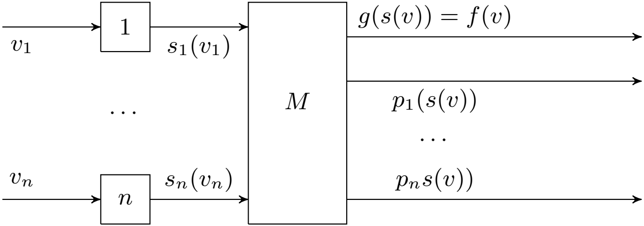
Proposition (Revelationsprinzip)

Es gibt einen allgemeinen Mechanismus M, der f in dominanten Strategien implementiert.

$\Leftrightarrow$

Es gibt einen anreizkompatiblen Mechanismus M' mit direkter Offenlegung und Ergebnisfunktion f.

Beweis:



Revelationsprinzip

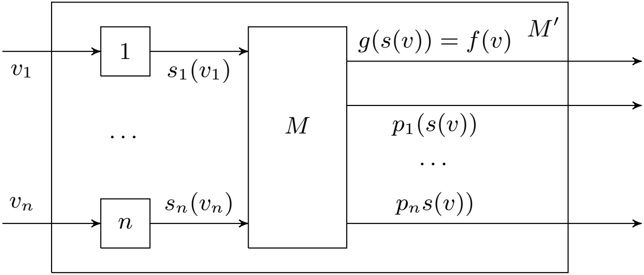
Proposition (Revelationsprinzip)

Es gibt einen allgemeinen Mechanismus M, der f in dominanten Strategien implementiert.

$\Leftrightarrow$

Es gibt einen anreizkompatiblen Mechanismus M' mit direkter Offenlegung und Ergebnisfunktion f.

Beweis:



Rucksackauktion

Aus Myersons Lemma folgt, dass sich der Entwurf von anreizkompatiblen Mechanismen auf den Entwurf von monotonen Ergebnisfunktionen reduziert. Dabei treten aber Probleme mit der Komplexität auf.

Als erstes Beispiel betrachten wir eine Rucksackauktion:

Ein TV-Sender möchte eine **Werbepause von G Sekunden** mit Spots füllen. Es gibt eine Menge I von n Firmen, die einen Spot senden wollen. Jede Firma $i \in I$

- liefert **Werbespot mit Länge** $g_i \leq G$ Sekunden (g_i öffentlich bekannt).
- hat **Bewertung** $v_i \geq 0$ wenn ihr Spot gesendet wird (v_i private Information) und Bewertung 0 sonst.

Die Rucksackauktion ist offensichtlich ein Single-Parameter Bereich. Betrachten wir zuerst den VCG-Mechanismus.

VCG Mechanismus für die Rucksackauktion

VCG Mechanismus

- Frage Bewertungen v_i von allen Firmen $i \in I$ ab
- Wähle Teilmenge $S \subseteq I$ von Spots, die den sozialen Nutzen maximiert:

$$f(v) = \arg\max_{S \subseteq I} \left\{ \sum_{i \in S} v_i \mid \sum_{i \in S} g_i \leq G \right\}$$

- Zahlungen $p_i(v)$ wie in Myersons Lemma

VCG muss optimale Lösungen für Instanzen des Rucksackproblems berechnen. Aber das Rucksackproblem ist NP-hart. Damit ergibt sich ein Zielkonflikt zwischen drei wünschenswerten Eigenschaften des Mechanismus:

(1) anreizkompatibel

(2) maximiert sozialen Nutzen

(3) berechenbar in polynomieller Zeit

Komplexität von anreizkompatiblen Mechanismen

Der Konflikt besteht zwischen Eigenschaften (2) und (3). Die Problematik wird im Bereich der Approximationsalgorithmen seit Jahrzehnten erforscht. Wenn wir diese Algorithmen benutzen, schwächen wir Eigenschaft (2) ab zu

(1) anreizkompatibel

(2') approximiert sozialen Nutzen möglichst gut

(3) berechenbar in polynomieller Zeit

Wir können aber nicht irgendwelche Approximationsalgorithmen anwenden. Da wir (1) einhalten wollen, müssen auch Zahlungen existieren, die einen anreizkompatiblen Mechanismus ergeben. Im Single-Parameter Bereich müssen wir also möglichst gute monotone Approximationsalgorithmen entwerfen.

Eine zentrale Frage im Algorithmischen Mechanismusentwurf: Wieviel muss man durch die zusätzliche Forderung der Anreizkompatibilität an sozialem Nutzen verlieren?

Approximationsalgorithmen und Mechanism Design

Wie gut sind anreizkompatible Approximationsalgorithmen im Vergleich zu beliebigen Approximationsalgorithmen?

Approximationsfaktor

- Wir bezeichnen eine optimale Teilmenge von Spots mit S^*.
- c-Approximationsalgorithmus: Liefert eine Teilmenge $T \subseteq I$ mit

$$\sum_{i \in T} v_i \quad \geq \quad \frac{1}{c} \cdot \sum_{i \in S^*} v_i$$

- Eine einfache n-Approximation:
  Wähle nur einen einzigen Spot mit maximaler Bewertung. Anreizkompatibel ist trivial – wir behandeln die gesamte Werbepause wie ein einzelnes Gut (also eine Vickrey-Zweitpreisauktion)

Das geht doch besser! In "Theoretische Informatik 1" haben wir dereinst bewiesen:

Satz

Das Rucksackproblem hat ein volles Approximationsschema, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ können wir eine $(1+\varepsilon)$-approximative Lösung berechnen in Zeit $O(n^3/\varepsilon)$.

Leider kann man für diesen Algorithmus zeigen: Er ist nicht monoton, siehe unten.

Greedy-Algorithmus für die Rucksackauktion

INPUT: (g_i, v_i) für jede Firma $i \in I$

OUTPUT: Menge S von gewählten Spots.

1. `Sortiere Firmen:`
$$\frac{v_1}{g_1} \geq \ldots \geq \frac{v_n}{g_n}$$
2. `Setze` $S' \leftarrow \emptyset$ `und` $j \leftarrow 1$`, sei` $v_{\max} = \max_j v_j$
3. `While` $\left(g_j + \sum_{k \in S'} g_k\right) \leq G$ `do:`
4. $\quad S' \leftarrow S' \cup \{j\}$ `und` $j \leftarrow j + 1$
5. `If` $v_{\max} > \sum_{k \in S'} v_k$ `then` $S \leftarrow \arg\max_j v_j$`; else` $S \leftarrow S'$

Satz

Der Greedy-Algorithmus ist 2-approximativ und monoton. Es gibt für die Rucksackauktion einen anreizkompatiblen Mechanismus, der mindestens die Hälfte des optimalen sozialen Nutzens garantiert.

Beispiele

Sei die Gesamtlänge der Werbepause $G = 100$ Sekunden.

Firma	1	2	3	4	5
v_i	45	20	45	40	50
g_i	15	25	60	50	90

Nach Sortierung in Schritt 1 ergibt sich die Reihenfolge der Firmen als (1,4,2,3,5):

$$45/15 \geq 40/50 = 20/25 \geq 45/60 \geq 50/90.$$

In der Schleife in Schritten 2-4 ergibt sich $S' = \{1, 4, 2\}$.

In Schritt 5 gilt

$$50 = v_{\max} < \sum_{j \in S'} v_j = 105.$$

Also ist das Ergebnis $S = \{1, 4, 2\}$ mit Wert 105.

Optimum: $S^* = \{1, 2, 3\}$ mit Wert 110.

Beispiele

Sei die Gesamtlänge der Werbepause $G = 100$ Sekunden.

Firma	1	2	3	4	5
v_i	45	20	45	40	260
g_i	15	25	60	50	90

Nach Sortierung in Schritt 1 ergibt sich die Reihenfolge der Firmen als (1,5,4,2,3):

$$45/15 \geq 260/90 \geq 40/50 = 20/25 \geq 45/60.$$

In der Schleife in Schritten 2-4 ergibt sich $S' = \{1\}$.

In Schritt 5 gilt

$$260 = v_{\max} > \sum_{j \in S'} v_j = 45.$$

Also ist das Ergebnis $S = \{5\}$ mit Wert 260.

Optimum: $S^* = \{5\}$ mit Wert 260.

2-Approximation

Beweis:
Man kann direkt beobachten, dass der Greedy-Algorithmus monoton ist (Übung).

Zur Beschräkung des Approximationsfaktors nutzen wir die fraktionale Relaxierung, bei der wir von jedem Spot i **einen beliebigen Bruchteil** $x_i \in [0,1]$ senden können.

Für die fraktionale Relaxierung optimieren wir also:

$$f_{frak}(v) = \arg \max_{x \in [0,1]^n} \left\{ \sum_i x_i v_i \mid \sum_i x_i g_i \leq G \right\}$$

Die fraktionale Relaxierung hat eine Obermenge an Lösungen, daher gilt für die **optimale fraktionale Lösung** x^*, dass sie nur besser sein kann:

$$\sum_{i \in S^*} v_i \quad \leq \quad \sum_{i \in I} x_i^* v_i .$$

2-Approximation

Wir versuchen in x^* für jede Sekunde der Werbepause möglichst viel Wert pro Sekunde rauszuholen. Seien die Spots nummeriert nach ihrem Wert pro Sekunde $v_1/g_1 \geq \ldots \geq v_n/g_n$. Wir wählen so viele Sekunden wie möglich von Spot 1, dann soviele wie möglich von Spot 2 usw. bis G Sekunden gewählt sind.

Genau das macht auch der Greedy-Algorithmus in Schritt 2-4! Wenn Greedy abbricht, kann die fraktionale Lösung allerdings noch einen Bruchteil des nächsten Spots j' in der Reihenfolge dazunehmen:

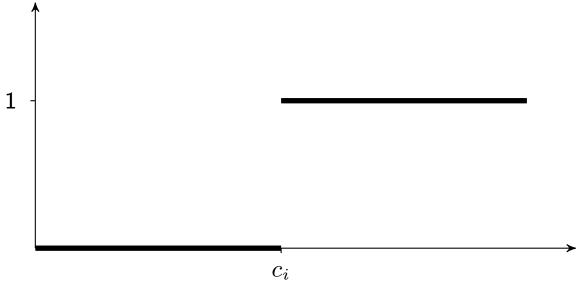
$$\sum_{i \in I} x_i^* v_i \quad = \quad \sum_{k \in S'} 1 \cdot v_k + x_{j'}^* v_{j'}$$

Also ergibt sich für den Approximationsfaktor

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k \in S^*} v_k}{\sum_{k \in S} v_k} \quad &= \quad \frac{\sum_{k \in S^*} v_k}{\max\left\{v_{\max}, \sum_{k \in S'} v_k\right\}} \quad \leq \quad \frac{\sum_{k \in S'} v_k + x_{j'}^* v_{j'}}{\max\left\{v_{\max}, \sum_{k \in S'} v_k\right\}} \\ &\leq \quad 2 \cdot \frac{\sum_{k \in S'} v_k + x_{j'}^* v_{j'}}{\sum_{k \in S'} v_k + v_{\max}} \quad \leq \quad 2 \;. \quad \square \end{aligned}$$

Zahlungen

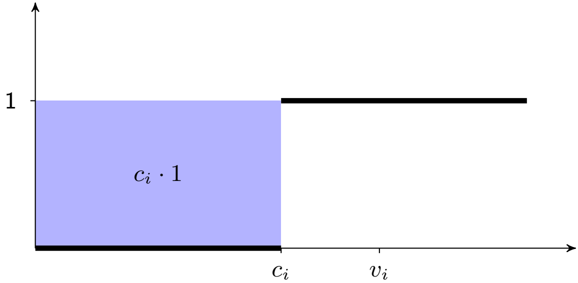
Jede Firma bekommt hier nur eine binäre Menge an Zeugs – im Ergebnis $a \in A$ wird Spot i gesendet $(x_i(a) = 1)$ oder nicht $(x_i(a) = 0)$. Jeder anreizkompatible Mechanismus liefert eine monotone, binäre Schrittfunktion x_i. Der Wert, bei dem x_i von 0 auf 1 springt, heißt kritischer Wert $c_i(v_{-i})$. Natürlich hängt er von den Geboten v_{-i} der anderen Firmen ab.



Für einen normalisierten Mechanismus gilt $p_i(v) = 0$ wenn Spot i nicht gezeigt wird. Sonst ergibt Myersons Lemma $p_i(v) = c_i(v_{-i}) \cdot 1$, d.h. i zahlt (bei festen Geboten der anderen Firmen) den Wert des kleinsten Gebots, das die Ausstrahlung des Spots garantiert.

Zahlungen

Jede Firma bekommt hier nur eine binäre Menge an Zeugs – im Ergebnis $a \in A$ wird Spot i gesendet $(x_i(a) = 1)$ oder nicht $(x_i(a) = 0)$. Jeder anreizkompatible Mechanismus liefert eine monotone, binäre Schrittfunktion x_i. Der Wert, bei dem x_i von 0 auf 1 springt, heißt kritischer Wert $c_i(v_{-i})$. Natürlich hängt er von den Geboten v_{-i} der anderen Firmen ab.



Für einen normalisierten Mechanismus gilt $p_i(v) = 0$ wenn Spot i nicht gezeigt wird. Sonst ergibt Myersons Lemma $p_i(v) = c_i(v_{-i}) \cdot 1$, d.h. i zahlt (bei festen Geboten der anderen Firmen) den Wert des kleinsten Gebots, das die Ausstrahlung des Spots garantiert.

Volles Approximationsschema

Betrachten wir nun nochmal das volle Approximationsschema für das Rucksack-problem.

INPUT: (g_i, v_i) für jede Firma $i \in I$ und $\varepsilon > 0$

OUTPUT: Menge S von gewählten Spots.

1. Sei $v_{\max} = \max_i v_i$ und $s = \varepsilon \cdot v_{\max}/n$
2. Runde alle Bewertungen auf ganze Zahlen: $v_i' = \lfloor v_i/s \rfloor$
3. Löse das Problem mit Werten v_i' optimal mit dyn. Prog.
4. Sei S' die optimale Lösung für gerundete Bewertungen
5. Setze $S \leftarrow S'$.

Die dynamische Programmierung in Schritt 3 läuft in Zeit $O(n^2 \cdot \max_i v_i')$. Durch Runden gilt $v_i' \in \{0, 1, \ldots, \lfloor n/\varepsilon \rfloor\}$, also läuft der Algorithmus für konstantes $\varepsilon > 0$ in polynomieller Zeit $O(n^3/\varepsilon)$.

Monotones Approximationsschema

Das Schema ist nicht monoton, weil s von $v_{\max}$ abhängt. Wenn wir dagegen in Schritt 1 die Granularität auf eine Konstante $s = \delta > 0$ unabhängig von $v_1, \ldots, v_n$ setzen, dann ist das Schema monoton (Übung).

Für welchen festen Wert δ kann man ohne Wissen über die Bewertungen immer eine $(1 + \varepsilon)$-Approximation garantieren? Für gar keinen.

Deswegen rufen wir das Schema für unendliche viele konstante Werte für δ auf. Dann wählen wir die beste Lösung aus allen diesen Aufrufen.

Das Schema ist bei jedem Aufruf monoton in v_i. Der soziale Nutzen ist monoton in v_i. Deswegen ist auch die beste Lösung aus allen Aufrufen monoton in v_i.

Unendliches Schema

INPUT: (g_i, v_i) für jede Firma $i \in I$ und $\varepsilon > 0$

OUTPUT: Menge S von gewählten Spots.

1. `For all` $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ `do:`
2. `Sei` $s(k) = \varepsilon \cdot 2^k / n$
3. `Runde Bewertungen:` $v_i(k) = \min\{s(k) \cdot \lfloor v_i / s(k) \rfloor, 2^k\}$
4. `Löse das Problem mit Werten` $v_i(k)$ `optimal mit dyn. Prog.`
5. `Sei` $S(k)$ `die optimale Lösung für gerundete Bewertungen`
6. `Setze` $S \leftarrow \arg\max_{S(k)} \sum_{i \in S(k)} v_i(k)$
   `(Tie-breaking bzgl. kleinerem` k`)`

Sei $k^* = \lceil \log_2(v_{\max}) \rceil$. Dann ist

$$\varepsilon \cdot v_{\max}/n \quad \leq \quad s(k^*) \quad \leq \quad \varepsilon \cdot 2 \cdot v_{\max}/n.$$

Also ist S'_{k^*} (und somit auch S) höchstens eine $(1 + 2\varepsilon)$-Approximation.

Endliches Approximationsschema

Man kann zeigen, dass das unendliche Schema nur für relativ wenige Werte $k \in \{k^* - \lceil \log_2 n \rceil - 2, \ldots, k^*\}$ aufgerufen werden muss. Für andere Werte von k können sich **keine besseren Lösungen** ergeben.

Damit brauchen wird also nicht unendliche viele Aufrufe sondern nur höchstens $\log_2(n)+4$ viele für den passenden Wertebereich von k. Der passende Wertebereich hängt von k^* und damit von $v_1, \ldots, v_n$ ab. Das bedeutet aber **nicht, dass wir k auf diesen Bereich einschränken** – es besagt nur, dass die optimalen Lösungen über alle, unendlich viele konstante Werte von k **in diesem Bereich gefunden** werden. Damit sind die Monotonie-Argumente für feste Werte von k weiterhin gültig.

In jedem Aufruf benötigt die dynamische Programmierung eine Laufzeit $O(n^2 \cdot \max_i v_i(k)/s(k))$. Für den kleinsten betrachteten Wert $k^* - \lceil \log_2 n \rceil - 2$ ergibt sich die kleinste Granularität und die größte Laufzeitschranke.

Endliches Approximationsschema

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\max_i \frac{v_i(k^* - \lceil \log_2 n \rceil - 2)}{s(k^* - \lceil \log_2 n \rceil - 2)} \\
&\leq \left\lfloor \frac{v_{\max}}{\varepsilon \cdot 2^{k^* - \lceil \log_2 n \rceil - 2}/n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n \cdot 2^{k^*}}{\varepsilon \cdot 2^{k^* - \log_2(n) - 3}} \right\rfloor \\
&\leq \lfloor 8n^2/\varepsilon \rfloor
\end{aligned}$$

Damit hat die dynamische Programmierung in jedem der $O(\log n)$ Aufrufe eine Laufzeit von höchstens $O(n^4/\varepsilon)$.

Satz

Es gibt ein monotones volles Approximationsschema für das Rucksackproblem mit Laufzeit $O(n^4 \log n/\varepsilon)$. Für die Rucksackauktion gibt es anreizkompatible Mechanismen, die für jedes feste $\varepsilon > 0$ mindestens einen $1/(1+\varepsilon)$-Anteil des optimalen sozialen Nutzens garantieren.

Ertragsmaximierung

Bisher war Geld nur Mittel zum Zweck, um den Mechanismus anreizkompatibel zu machen. Hier betrachten wir Geld als Zielfunktion des Mechanismus.

Ein-Gut-Auktion mit einem Bieter

Anreizkompatible Mechanismen sind *Fixpreis-Mechanismen*:

- Wähle Preis $p \geq 0$ (evtl. zufällig) unabhängig vom Gebot.
- Verkaufe das Gut wenn Gebot $v_i \geq p$.

Maximiere sozialen Nutzen: $p = 0$.
Maximiere Ertrag: ??

Für Ertragsmaximierung brauchen wir (zumindest teilweise) Informationen über die möglichen Bewertungen der Bieter. Ansonsten kann der erzielte Ertrag beliebig niedriger sein als der optimale Ertrag.

Average-Case und Verteilungen über Bewertungen

- Single-Parameter Bereich für jeden Bieter i
- Verteilung $\mathcal{V}_i$ für den privaten Parameter, $v_i \sim \mathcal{V}_i$
- Verteilungsvektor $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n)$
- Privater Wert von Bieter i wird unabhängig aus den $\mathcal{V}_i$ gezogen: Bieter i hat immer gleiche Verteilung von v_i, egal was die anderen Bieter an Wert bekommen.
- Mechanismus basiert auf Verteilungen, ist aber immer anreizkompatibel: Sag-die-Wahrheit ist dominante Strategie für jeden Bieter i, für jeden möglichen Wert v_i, und für alle möglichen Werte v_{-i}
- Bieter kennt Verteilungen nicht (bzw. sein Wissen darüber ändert nichts daran, dass er immer die Wahrheit sagen will)
- Verteilungen wichtig nur für Entwurf und Analyse des Mechanismus, nicht für das strategische Verhalten der Bieter.

Verteilungen

Die Verteilungsfunktion $F_i(x)$ für Verteilung $\mathcal{V}_i$ ist $F_i(x) = \Pr_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[v_i \leq x]$.
Sie hat die Dichte $f_i(x)$ und es gilt $F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(x) dx$.

Beispiel Ein-Gut-Auktion mit einem Bieter:
Mit Preis p ergibt sich Ertrag $p \cdot (1 - F_i(p))$. Sei z.B. $\mathcal{V}_i$ uniform auf $[0, 1]$, dann $F_i(x) = x$ für $x \in [0, 1]$. Optimaler Ertrag $1/4$ für $p = 1/2$.

Definition

Ein optimaler Mechanismus ist ein anreizkompatibler Mechanismus $(f, p_1, \ldots, p_n)$, der den erwarteten Ertrag maximiert

$$\mathbb{E}_{v \sim \mathcal{V}}\left[\sum_i p_i(v)\right] \quad .$$

Anstatt die Zahlungen direkt anzuschauen, betrachten wir erst einen etwas anderen Wert.

Virtuelle Werte

Definition

Für Bieter i, sei v_i der Wert, F_i seine Verteilungsfunktion und f_i die Dichte der Verteilung. Dann ist der virtuelle Wert von Bieter i

$$\varphi_i(v_i) \quad = \quad v_i - \frac{1 - F(v_i)}{f_i(v_i)} \quad .$$

Es gilt immer $v_i \geq \varphi(v_i)$. Es kann passieren, dass $v_i \geq 0$ und $\varphi_i(v_i) \leq 0$.

Intuition: Wir möchten v_i als Preis setzen, müssen aber $(1 - F(v_i)/f_i(v_i)$ für die ehrliche Information "bezahlen".

Beispiel mit uniformer Verteilung auf [0,1]:

- $F(x) = x$ und $f(x) = 1$ für $x \in [0, 1]$.
- Damit: $\varphi(v_i) = v_i - (1 - v_i)/1 = 2v_i - 1$

Virtuelle Werte und Zahlungen

Für jeden Bieter sind die *erwarteten* Zahlungen gleich dem *erwarteten* virtuellen Wert.

Lemma

Sei $(f, p_1, \ldots, p_n)$ *ein anreizkompatibler Mechanismus in einem Single-Parameter Bereich und sei* $\mathcal{V}_i$ *die Verteilung von Bieter* i*. Dann gilt für jeden Bieter* i *und jedes* v_{-i}

$$\mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[p_i(v_i, v_{-i})] \quad = \quad \mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[\varphi_i(v_i) \cdot x_i(f(v_i, v_{-i}))] \ .$$

Wir beweisen das Lemma am Ende.

Für die Gesamtzahlung betrachten wir den virtuellen Nutzen $\sum_i \varphi_i(v_i) \cdot x_i(f(v))$.

Erwartete Zahlungen sind virtueller Nutzen

Aus dem Lemma folgt das zentrale Resultat: Die *erwarteten Zahlungen* sind gleich dem *erwarteten virtuellen Nutzen*.

Satz

Sei $(f, p_1, \ldots, p_n)$ *ein anreizkompatibler Mechanismus in einem Single-Parameter Bereich und sei* $\mathcal{V}$ *der Vektor der Verteilungen. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}_{v \sim \mathcal{V}} \left[\sum_i p_i(v) \right] \quad = \quad \mathbb{E}_{v \sim \mathcal{V}} \left[\sum_i \varphi_i(v_i) \cdot x_i(f(v)) \right] \quad .$$

Daher können wir uns beim Maximieren vom Ertrag auf die Optimierung des virtuellen Nutzens konzentrieren. Das ist in vielen Fällen sehr ähnlich zur Optimierung des sozialen Nutzens.

Beweis

Beweis (Satz):
Wir nehmen die Aussage des Lemmas und nutzen den Erwartungswert über v_{-i}:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}[p_i(v)] &= \mathbb{E}_{v_{-i}\sim\mathcal{V}_{-i}}\mathbb{E}_{v_i\sim\mathcal{V}_i}[p_i(v_i, v_{-i})] \\
&= \mathbb{E}_{v_{-i}\sim\mathcal{V}_{-i}}\mathbb{E}_{v_i\sim\mathcal{V}_i}[\varphi_i(v_i)\cdot x_i(f(v_i, v_{-i}))] \\
&= \mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}[\varphi_i(v_i)\cdot x_i(f(v))] \ .
\end{aligned}$$

Mit der Linearität des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}\left[\sum_i p_i(v)\right] &= \sum_i \mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}\left[p_i(v)\right] \\
&= \sum_i \mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}[\varphi_i(v_i)\cdot x_i(f(v))] \\
&= \mathbb{E}_{v\sim\mathcal{V}}\left[\sum_i \varphi_i(v_i)\cdot x_i(f(v))\right] \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

Optimale Auktion

Ein optimaler anreizkompatibler Mechanismus (maximiert die Zahlungen, daher) maximiert also den virtuellen Nutzen!

Gilt auch umgekehrt: Ein Mechanismus, der den virtuellen Nutzen maximiert, ist ein optimaler anreizkompatibler Mechanismus?

Ja, aber nur wenn der virtuelle Nutzen eine *monotone Funktion in jedem* v_i *ist*! Sonst ist der Mechanismus nicht anreizkompatibel. Eine hinreichende Bedingung sind reguläre Verteilungen:

Definition

Verteilung $\mathcal{V}_i$ heißt regulär wenn der virtuelle Wert $\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v)}{f_i(v)}$ nicht-fallend in v_i ist.

Korollar

Der optimale Mechanismus mit maximalem Ertrag in Single-Parameter Bereichen mit regulären Verteilungen $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ *optimiert den virtuellen Nutzen der Bieter.*

Optimale Mechanismen für Reguläre Verteilungen

Zwei Verallgemeinerungen:

– Wir nehmen nun an, die Bieter kennen alle Verteilungen und haben Gebotsstrategien. Sie geben Gebote ab abhängig von ihrem realisierten Wert und den Gebotsstrategien der anderen Bieter und deren (zufälligen) Werten. Ein Mechanismus ist *Bayes-anreizkompatibel*, wenn Sag-die-Wahrheit ein Gleichgewicht in diesem Spiel ist (ein sog. Bayes-Nash-Gleichgewicht). Auch hier gilt, dass Maximierung des virtuellen Nutzens den optimalen Ertrag liefert. Für reguläre Verteilungen ergibt dies also sogar den optimalen Bayes-anreizkompatiblen Mechanismus.

– Für nicht-reguläre Verteilungen ist es möglich, die virtuellen Werte monoton zu machen (sog. *Bügeln*, engl: Ironing). So bekommt man den maximalen Ertrag auch für nicht-reguläre Verteilungen: Durch Optimierung des (gebügelten) virtuellen Nutzens.

Optimale Mechanismen sind erstaunlich einfach!

Ein-Gut-Auktion mit n Bietern und evtl. unterschiedlichen regulären Verteilungen:

- Gut geht an Bieter mit bestem virtuellen Wert $\max_i \varphi_i(v_i)$. Was wenn $\max_i \varphi_i(v_i)$ negativ ist? Dann wird das Gut gar nicht vergeben.
- Der Wert $\varphi_i^{-1}(0)$ ist also ein Reservationspreis für Bieter i: Er muss mindestens ein Gebot v_i abgeben mit $\varphi_i(v_i) \geq 0$, sonst kommt er für das Gut gar nicht in Frage.
- Bekommt i das Gut, zahlt er das Maximum aus Reservationspreis und zweithöchstem Gebot, wobei das "zweithöchste Gebot" vom Bieter mit zweithöchstem virtuellen Wert stammt. Dieser zweithöchste virtuelle Wert muss in ein zweithöchstes Gebot aus Sicht von i umgerechnet werden: $\max(\varphi_i^{-1}(0), \varphi_i^{-1}(\max_{j \neq i} \varphi_j(v_j)))$.

- Beispiel alle $\mathcal{V}_i$ gleich und uniform auf $[0, 1]$:
  Alle Funktionen $\varphi_i(x) = 2x - 1$ sind gleich, alle Reservationspreise $\varphi^{-1}(0) = 1/2$ sind gleich, und es gilt $\varphi_i^{-1}(\varphi_j(x)) = x$. Das Gut geht an den maximalen Bieter i, wenn sein Gebot $v_i \geq \varphi^{-1}(0) = 1/2$. Dann zahlt er $\max(1/2, \max_{j \neq i} v_j)$. Optimale Auktion ist also Vickrey-Zweitpreisauktion mit Reservationspreisen.

Beweis des Lemmas

Beweisidee (Lemma):
Sei $a(t) = f(t, v_{-i})$ für feste Gebote v_{-i}. Wir wollen zeigen:

$$\mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[p_i(v_i, v_{-i})] = \mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[\varphi_i(v_i) \cdot x_i(a(v_i))] \ .$$

Dafür nutzen wir Myersons Lemma. Sei oBdA $t_i^0 = 0$. Dann gilt für die Zahlungen

$$\begin{aligned} p_i(v_i, v_{-i}) &= v_i \cdot x_i(a(v_i)) - \int_0^{v_i} x_i(a(t))dt \\ &= \int_0^{v_i} t \cdot x_i'(a(t))dt \end{aligned}$$

mit partieller Integration. Wir nehmen hier an, dass x differenzierbar ist. Wenn x_i monoton und beschränkt ist, dann folgt der Beweis ähnlich, mit einigen weiteren Argumenten und einer passenden Interpretation der Ableitung x_i'.

Beweis des Lemmas

Schritt 1:
Der erwartete Ertrag von Bieter i bei festen Geboten v_{-i} ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[p_i(v_i, v_{-i})] &= \int_{z=0}^{t_i^1} p_i(z, v_{-i})\ f_i(z)dz \\ &= \int_{z=0}^{t_i^1} \left[\int_{t=0}^{z} t \cdot x_i'(a(t))dt\right] f_i(z)dz\end{aligned}$$

Die erste Gleichung nutzt Unabhängigkeit der Verteilungen – dadurch hat das feste v_{-i} keinen Einfluß auf $\mathcal{V}_i$.

Schritt 2:
Jetzt müssen wir ein wenig vereinfachen. Wir vertauschen die Integrationen:

$$\begin{aligned}\int_{z=0}^{t_i^1} \left[\int_{t=0}^{z} t \cdot x_i'(a(t))dt\right] f_i(z)dz &= \int_{t=0}^{t_i^1} \left[\int_{z=t}^{t_i^1} f_i(z)dz\right] t \cdot x_i'(a(t))dt \\ &= \int_{t=0}^{t_i^1} (1 - F_i(t)) \cdot t \cdot x_i'(a(t))dt\end{aligned}$$

was den Ausdruck klarer werden lässt.

Beweis des zentralen Lemmas

Schritt 3:
Wir versuchen wieder partielle Integration durchzuführen. Wir nutzen:

$$g(t) = (1 - F_i(t)) \cdot t \qquad \text{und} \qquad h'(t) = x_i'(a(t))$$

Mit partieller Integration ergibt dies

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[p_i(v_i, v_{-i})] &= (1 - F_i(t)) \cdot t \cdot x_i(a(t)) \Big|_0^{t_i^1} \\
&\quad - \int_{t=0}^{t_i^1} x_i(a(t)) \cdot (1 - F_i(t) - t \cdot f_i(t)) dt \\
&= \int_{t=0}^{t_i^1} \left(t - \frac{1 - F_i(t)}{f_i(t)} \right) \cdot x_i(a(t)) \cdot f_i(t) dt \\
&= \int_{t=0}^{t_i^1} \varphi_i(t) \cdot x_i(a(t)) \cdot f_i(t) dt \\
&= \mathbb{E}_{v_i \sim \mathcal{V}_i}[\varphi_i(t) \cdot x_i(a(v_i))]
\end{aligned}$$

wie erhofft. □

Eine Alternative

Obwohl die optimale Auktion relativ einfach aussieht, kann es schwierig werden, sie in der Praxis umzusetzen. Selbst für ein einzelnes Gut brauchen wir eventuell bis zu n verschiedene Reservationspreise und virtuelle Werte, und damit genaues Wissen über jede der Verteilungsfunktionen F_i und Dichtefunktionen f_i.

Dagegen gibt es im Fall der Ein-Gut-Auktion eine sehr viel einfachere Alternative für mehr Ertrag – mehr Wettbewerb!

Das folgende Resultat betrachtet Ertrag für Ein-Gut-Auktionen mit **gleichen regulären** Verteilungen für alle Bieter. Es braucht nur einen weiteren Bieter, dann ist der Ertrag der einfachen Vickrey Auktion schon besser als der Ertrag der optimalen Auktion.

Beweis

Satz (Bulow, Klemperer 1996)

Sei $\mathcal{V}$ eine reguläre Verteilung und $n \in \mathbb{N}$. Seien p die Zahlungen der Vickrey Zweitpreisauktion mit $n+1$ Bietern und p^* die der optimalen (für $\mathcal{V}$) Auktion mit n Bietern. Dann gilt

$$\mathbb{E}_{v \sim \mathcal{V}^{n+1}} \left[\sum_{i=1}^{n+1} p_i(v) \right] \quad \geq \quad \mathbb{E}_{v \sim \mathcal{V}^{n}} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^*(v) \right] \quad .$$

Beweis:

Für die Analyse betrachten wir eine fiktive Auktion:

1. Simuliere die optimale n-Bieter Auktion für $\mathcal{V}$ auf Bietern $1, \ldots, n$
2. Wenn das Gut nicht zugewiesen wurde, gib es Bieter $n+1$ umsonst.

Offensichtliche Eigenschaften:

- Der erwartete Ertrag der fiktiven Auktion für $n+1$ Bieter ist genau der erwartete Ertrag der optimalen Auktion für n Bieter.
- Die fiktive Auktion gibt das Gut immer an einen der Bieter.

Beweis

Betrachte nun die optimale Auktion für $n+1$ Bieter, die immer das Gut zuweisen muss. Sie maxmimiert den virtuellen Nutzen (unter der Bedingung, dass das Gut immer zugewiesen sein muss). Also gibt sie das Gut immer an den höchsten Bieter, selbst wenn sein virtueller Wert negativ ist.

Die Zweitpreisauktion weist das Gut immer an den Bieter mit höchstem Wert zu. $\mathcal{V}$ ist regulär, also ist das auch der Bieter mit dem höchsten virtuellen Wert. Das ist also genau die optimale Auktion, die immer das Gut zuweisen muss.

Die fiktive Auktion für $n+1$ Bieter muss immer das Gut zuweisen und hat den Ertrag der optimalen Auktion für n Bieter mit Verteilung $\mathcal{V}$.

Die Vickrey Zweitpreisauktion für $n+1$ Bieter muss immer das Gut zuweisen und hat den besten Ertrag (bzgl. $\mathcal{V}$) aller solcher Auktionen. $\square$

Literatur

- Myerson. Optimal Auction Design. Mathematics of Operations Research 6(1):58–83, 1981.
- Mu'Alem, Nisan. Truthful Approximation Mechanisms for Restricted Combinatorial Auctions. Games and Economic Behavior 64(2):612-631, 2008.
- Briest, Krysta, Vöcking. Approximation Mechanisms for Utilitarian Mechanism Design. STOC 2005.
- Bulow, Klemperer. Auctions versus Negotiations. American Economic Review 86(1):180–194, 1996.
- Kirkegaard. A Short Proof of the Bulow-Klemperer Auctions vs. Negotiations Result. Economic Theory 28(2):449–452, 2006.

Mehr Literatur

- Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani. Algorithmic Game Theory, 2007. (Kapitel 9 und 11)
- Roughgarden. Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory, 2016. (Kapitel 3-6)