Mechanismen als Spiele

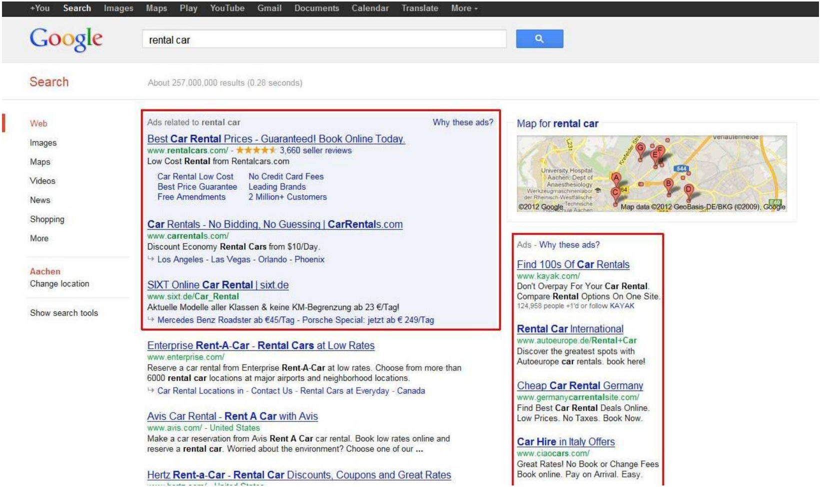
Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2018

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Ansteigende Auktionen und Walras-Gleichgewicht

Auktionen für Sponsored Search



Modell

Wir modellieren die Zuweisung von Werbeslots auf einer Seite mit Suchresultaten.

- n Werbekunden/Spieler, Spieler i hat Bewertung $v_i \geq 0$ pro Click
- n Werbeslots auf der Seite (falls weniger: unsichtbare Dummy-Slots)
- Slot j hat Clickrate $\alpha_j \geq 0$
- Spieler i hat Relevanz $\gamma_i \geq 0$ zum Suchbegriff
- Wenn Spieler i's Anzeige in Slot j erscheint, erhält er $\alpha_j \cdot \gamma_i$ Clicks.

Mechanismus sammelt Gebote b_i ein, weist Werbeanzeigen auf Slots zu, setzt Zahlungen p_i pro Click.

Nutzen von Spieler i wenn er Slot j erhält

$$\alpha_j \cdot \gamma_i \cdot (v_i - p_i) \quad .$$

Wir nehmen an $\gamma_i = 1$, gleiche Resultate im allgemeinen Fall!

VCG für Sponsored Search

Als Beispiel betrachten wir zuerst den VCG-Mechanismus in diesem Szenario.

- VCG maximiert sozialen Nutzen: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{j_i} b_i$ mit Spieler i in Slot j_i.
- Ordne Spieler: $b_1 \geq \ldots \geq b_n$, ordne Slots: $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$
- Austausch-Argument: Sozialer Nutzen maximal bei $j_i = i$.

- VCG-Zahlungen mit Clarke-Regel:

$$
\begin{aligned}
\alpha_i p_i &= h_i(b_{-i}) - \sum_{j \neq i} \alpha_j b_j = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j b_j + \sum_{j=i}^{n-1} \alpha_j b_{j+1} - \sum_{j \neq i} \alpha_j b_j \\
&= \sum_{j=i+1}^{n} b_j (\alpha_{j-1} - \alpha_j) = b_{i+1}(\alpha_i - \alpha_{i+1}) + \alpha_{i+1} p_{i+1}
\end{aligned}
$$

- Einsetzen ergibt Nutzen von Spieler i als $\alpha_i(v_i - b_{i+1}) - \alpha_{i+1}(b_{i+1} - p_{i+1})$.

Generalized-Second-Price Auktion

VCG hat viele gute Eigenschaften, es ist IC und kann sehr schnell berechnet werden. Dennoch wird VCG heute von keiner großen Suchmaschine benutzt.

Stattdessen nutzen alle Varianten des folgenden Schemas, bekannt als die Generalized-Second-Price Auktion (GSP):

- Allokation maxmiziert sozialen Nutzen, i.e., Spieler i bekommt Slot i.
- Zahlung von Spieler i ist nächsthöheres Gebot b_{i+1}. Hier sei $b_{n+1} = 0$.
- Nutzen von Spieler i in GSP ist $\alpha_i(v_i - b_{i+1})$.

Beachte: Für die gleiche Menge an Geboten setzt GSP höhere Zahlungen:

$$\sum_{j=i+1}^{n} b_j(\alpha_{j-1} - \alpha_j) \quad \leq \quad b_{i+1} \sum_{j=i+1}^{n} (\alpha_{j-1} - \alpha_j) \quad \leq \quad \alpha_i b_{i+1} \quad .$$

Allerdings ist unklar, ob die Spieler gleiche Gebote bei VCG und GSP abgeben.

GSP ist nicht anreizkompatibel

Es stellt sich heraus, dass GSP nicht anreizkompatibel ist!

Betrachte folgendes Beispiel:

- Wir haben 3 Spieler und 3 Slots.
- Bewertungen: $v_1 = 10$, $v_2 = 4$, $v_3 = 2$
- Clickraten: $\alpha_1 = 200$, $\alpha_2 = 199$, $\alpha_3 = 0$
- Wenn alle Spieler ehrlich sind $b_i = v_i$, dann bekommt Spieler 1 den ersten Slot, zweithöchstes Gebot ist 4. Sein Nutzen: $200 \cdot (10 - 4) = 1200$.
- Wenn Spieler 1 nun $b_i = 3$ sagt, dann bekommt er den zweiten Slot, dritthöchstes Gebot ist 2. Sein Nutzen: $199 \cdot (10 - 2) = 1592$.

Wie können wir die resultierenden Zuweisungen und Anreize von GSP erfassen?

Ergibt GSP gute Zuweisungen obwohl es mit unehrlichen Geboten arbeitet?

Entwurf von Mechanismen als strategisches Spiel

Jeder anreizkompatible oder nicht-anreizkompatible Mechanismus induziert ein strategisches Spiel unter den Spielern. Das Spiel für GSP ist gegeben wie folgt.

- n Spieler, Strategieraum $\Sigma_i = [0, \infty)$
- Spieler i wählt Strategie $b_i \in \Sigma_i$, Zustand b des Spiels
- Nummeriere Spieler $v_1 \geq \ldots \geq v_n$ bzgl. Wert (nicht Gebot)
- Sei π Ordnung bzgl. Gebot. $\pi(j) = i$ wenn i das j-größte Gebot hat.
- Nutzen von Spieler i:

$$u_i(b) = \alpha_j(v_i - b_{\pi(j+1)}) \qquad \text{wobei } j \text{ mit } \pi(j) = i.$$

Ein Mechanismus ist anreizkompatibel genau dann wenn $b_i = v_i$ eine schwach dominante Strategie im Spiel ist. Wie oben gezeigt hat das GSP-Spiel diese Eigenschaft nicht immer.

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Anstatt IC betrachten wir hier (ex-post) Nash-Gleichgewichte des GSP-Spiels. Ein reines NG ist ein Zustand b in dem kein Spieler unilateral zu einem anderen Gebot $b'_i \neq b_i$ abweichen möchte (nachdem Auktion mit b stattgefunden hat).

Wir stellen zuerst fest, dass es sich nicht lohnt, ein Gebot $b_i > v_i$ abzugeben.

Lemma

Für jedes $b_i \geq v_i$ und jedes b_{-i} gilt $u_i(b_i, b_{-i}) \leq u_i(v_i, b_{-i})$.

Beweis:

- Spieler i bei Position j in beiden Zuständen (b_i, b_{-i}) und $(v_i, b_{-i}) \Rightarrow$ Gleicher Nutzen.
- Ansonsten hebt ihn $b_i > v_i$ auf Position $k < j$ in (b_i, b_{-i}), und er schiebt Spieler $\pi(k)$ runter zu Slot $k + 1$.
- Neue Zahlung wird $b_{\pi(k)} \geq v_i$ und sein Nutzen wird

$$\alpha_k(v_i - b_{\pi(k)}) \quad \leq \quad 0 \quad \leq \quad \alpha_j(v_i - b_{\pi(j+1)}) \qquad \square$$

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Satz (Edelman, Ostrovsky, Schwarz 2007)

Das GSP-Spiel hat ein reines Nash-Gleichgewicht mit maximalem sozialen Nutzen. Der Preis der Stabilität für reine Nash-Gleichgewichte ist 1.

Beweisidee:
Die Gebote im Nash-Gleichgewicht sind rekursiv gegeben durch

$$b_n = v_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\right) \qquad \text{und} \qquad b_i = v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}(v_i - b_{i+1}) \ .$$

Wir zeigen nur, dass die resultierende Zuweisung den sozialen Nutzen maximiert, d.h. Gebote sind geordnet wie Bewertungen: $b_i \geq b_{i+1}$, $\forall i = 1, \ldots, n-1$.
Dazu stellen wir erst fest, dass $b_n \leq v_n$. Wenn $b_{i+1} \leq v_{i+1}$, dann $b_{i+1} \leq v_i$ und

$$b_i = v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}(v_i - b_{i+1}) \quad \leq \quad v_i \ .$$

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Daher gilt mit Induktion, dass $v_i \geq b_i$ für jeden i, und somit $v_i \geq v_{i+1} \geq b_{i+1}$. Das bedeutet

$$\begin{aligned} v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \cdot v_i &\geq b_{i+1} - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \cdot b_{i+1} \\ \Rightarrow \quad b_i = v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}(v_i - b_{i+1}) &\geq b_{i+1} \end{aligned}$$

und zeigt, dass die Zuweisung optimal ist. □

Wir wissen also, dass das beste reine Nash-Gleichgewicht optimal ist. Wenn die Spieler nicht überbieten, dann ist sogar das schlechteste reine Nash-Gleichgewicht nicht schlecht.

Satz (Paes Leme, Tardos 2010)

Im GSP-Spiel ist der Preis der Anarchie für reine Nash-Gleichgewichte ohne Überbieten höchstens 2.

Preis der Anarchie für GSP

Lemma

Für jeden Vektor von Bewertungen v, Clickraten α und Ordnung π im Nash-Gleichgewicht, sowie für jedes $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i} + \frac{v_{\pi(i)}}{v_{\pi(j)}} \quad \geq \quad 1 \ . \tag{1}$$

Damit gilt entweder $\quad {}^{\alpha_j}/_{\alpha_i} \geq {}^1/_2 \quad$ *oder* $\quad {}^{v_{\pi(i)}}/_{v_{\pi(j)}} \geq {}^1/_2$.

Beweis:
Wenn $j \leq i$, dann ${}^{\alpha_j}/_{\alpha_i} \geq 1$. Sonst, da b ein NG, will Bieter $\pi(j)$ in Slot j nicht zu Slot $i < j$ wechseln:

$$\alpha_j(v_{\pi(j)} - b_{\pi(j+1)}) \quad \geq \quad \alpha_i(v_{\pi(j)} - b_{\pi(i)}) \ .$$

Wir nutzen $b_{\pi(j+1)} \geq 0$ und kein-Überbieten $v_i \geq b_{\pi(i)}$, um die linke Seite noch größer und die rechte Seite noch kleiner zu machen:

$$\alpha_j v_{\pi(j)} \quad \geq \quad \alpha_i(v_{\pi(j)} - v_{\pi(i)}) \ .$$

Teile beide Seiten durch $\alpha_i v_{\pi(j)}$, und das Lemma folgt. $\square$(Lemma)

Preis der Anarchie für GSP

Das Lemma spielt eine entscheidende Rolle im Beweis des Satzes. Wir nennen eine Ordnung π schwach gültig wenn damit die Bedingung (1) gilt. Das Lemma besagt, jede Ordnung π im Nash-Gleichgewicht ist schwach gültig.

Beweis des Satzes:
Wir zeigen die Schranke 2 für jeden Zustand, der eine schwach gültige Ordnung π erzeugt. Wir nutzen Induktion über die Anzahl der Spieler.

- $n = 1$, trivial erfüllt.
- Wir nehmen an der Preis der Anarchie ist 2 wenn π schwach gültig für $n-1$ Spieler. Nun betrachten wir n Spieler. Sei π is schwach gültig.
- Sei $j = \pi(1)$ Spieler im ersten Slot und $i = \pi^{-1}(1)$ Slot des Spielers mit maximaler Bewertung.
- Wenn $j = i = 1$, lösche Spieler 1 und Slot 1. Die reduzierte Ordnung π bleibt schwach gültig für die verbleibenden $n-1$ Spieler und Slots. Mit der Induktionsannahme beschränken wir den sozialen Nutzen:

$$\alpha_1 v_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k v_{\pi(k)} \quad \geq \quad \alpha_1 v_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \alpha_k v_k \quad \geq \quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \quad .$$

Preis der Anarchie für GSP

- Für allgemeines i und j nutzen wir deren Definition. Die Bedingung (1) sagt uns, dass entweder $\alpha_i/\alpha_1 \geq 1/2$ oder $v_j/v_1 \geq 1/2$. Wir betrachten den ersten Fall.
- Lösche Slot i und Spieler 1. π bleibt schwach gültig für die verbleibenden $n-1$ Spieler und Slots, also

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq i} \alpha_k v_{\pi(k)} &\geq \frac{1}{2}(\alpha_1 v_2 + \ldots + \alpha_{i-1}v_i + \alpha_{i+1}v_{i+1} + \ldots + \alpha_n v_n) \\ &\geq \frac{1}{2}(\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1}v_{i+1} + \ldots + \alpha_n v_n) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \alpha_k v_k\end{aligned}$$

und mit der Bedingung (erster Fall)

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_{\pi(k)} = \alpha_i v_1 + \sum_{k\neq i} \alpha_k v_{\pi(k)} \quad \geq \quad \frac{1}{2}\alpha_1 v_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \alpha_k v_k \quad .$$

Preis der Anarchie für GSP

- Im zweiten Fall löschen wir Slot 1 und Spieler j. π bleibt schwach gültig für die $n-1$ verbleibenden Spieler und Slots, also

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \alpha_k v_{\pi(k)} &\geq \frac{1}{2}(\alpha_2 v_1 + \ldots + \alpha_j v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \alpha_n v_n) \\ &\geq \frac{1}{2}(\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_j v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \alpha_n v_n) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \alpha_k v_k\end{aligned}$$

und mit der Bedingung (zweiter Fall)

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_{\pi(k)} = \alpha_1 v_j + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k v_{\pi(k)} \geq \frac{1}{2}\alpha_1 v_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \alpha_k v_k \ .$$

□(Satz)

Gemischte Nash-Gleichgewichte für GSP

Betrachte ein gemischtes Nash-Gleichgewicht, in dem jeder Spieler eine gemischte Strategie wählt, d.h. eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\Sigma_i = [0, \infty)$. Wir nehmen an, die Spieler überbieten nicht, d.h. $\Pr[b_i \leq v_i] = 1$.
Die Zuweisung, die sich aus π ergibt, ist nun eine Zufallsvariable. Wir nutzen $\sigma = \pi^{-1}$, also ist $\sigma(i)$ die Position von Spieler i in π.

Satz (Paes Leme, Tardos 2010)

Im GSP-Spiel ist der Preis der Anarchie für gemischte Nash-Gleichgewichte ohne Überbieten höchstens 4.

Der Beweis nutzt wieder ein technisches Lemma.

Lemma

Wenn ein zufälliger Zustand b im GSP-Spiel verteilt ist gemäß eines gemischten Nash-Gleichgewichts ohne Überbieten, dann gilt

$$\frac{\mathbb{E}[\alpha_{\sigma(i)}]}{\alpha_i} + \frac{\mathbb{E}[v_{\pi(i)}]}{v_i} \quad \geq \quad \frac{1}{2} \; .$$

Preis der Anarchie für gemischte Nash-Gleichgewichte

Beweis des Lemmas:
Wir zeigen zuerst folgende Behauptung:

Wenn i zu einer reinen Strategie $b'_i = \min(v_i, 2 \cdot \mathbb{E}[b_{\pi(i)}])$ abweicht, dann bekommt er mit Wahrscheinlichkeit mind. $1/2$ einen Slot in $\{1, \dots, i\}$.

Für den Beweis nehmen wir zuerst $b'_i = v_i$ an. Dann gilt die Behauptung, denn ohne Überbieten haben maximal $i-1$ Spieler ein höheres Gebot. Nun sei $b'_i = 2\mathbb{E}[b_{\pi(i)}]$. Dann folgt mit der Markov-Ungleichung

$$\Pr[b_{\pi(i)} \geq b'_i] \quad \leq \quad \frac{\mathbb{E}[b_{\pi(i)}]}{b'_i} \quad = \quad \frac{1}{2} \ .$$

Das zeigt die Behauptung.

Preis der Anarchie für gemischte Nash-Gleichgewichte

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
E[\alpha_{\sigma(i)}] \cdot v_i &\overset{\text{Zahlungen}}{\geq} E[u_i(b)] \\
&\overset{\text{Gem. NG}}{\geq} E[u_i(b_i', b_{-i})] \\
&\overset{\text{Behauptung}}{\geq} \frac{1}{2}\alpha_i(v_i - b_i') \\
&\overset{\min = -\max}{\geq} \frac{1}{2}\alpha_i(v_i - 2E[b_{\pi(i)}]) \\
&\overset{\text{kein Überbieten}}{\geq} \frac{1}{2}\alpha_i(v_i - 2E[v_{\pi(i)}]) \quad .
\end{aligned}$$

Wenn wir beide Enden der Ungleichungskette durch $\alpha_i \cdot v_i$ teilen, ergibt sich das Lemma. $\square$(Lemma)

Preis der Anarchie für gemischte Nash-Gleichgewichte

Beweis des Satzes:
Der Satz kann nun direkt bewiesen werden:

$$
\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i)} v_i\right] &\overset{\text{2 Arten erw. sozialen Nutzen zu schreiben}}{=} \frac{1}{2} E\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i)} v_i\right] + \frac{1}{2} E\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{\pi(i)}\right] \\
&\overset{\text{Linearität des E.-Wertes}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} E[\alpha_{\sigma(i)}] \cdot v_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot E[v_{\pi(i)}] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \left(\frac{E[\alpha_{\sigma(i)}]}{\alpha_i} + \frac{E[v_{\pi(i)}]}{v_i} \right) \\
&\overset{\text{Lemma}}{\geq} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad .
\end{aligned}
$$

□(Satz)

High Scores

Die besten Schranken an den Preis der Anarchie finden sich bei [Caragiannis, Kaklamanis, Kanellopoulos, Kyropoulou, Lucier, Paes Leme, Tardos 2012]:

- Reine NG: ≤ 1.282
- Reine NG: ≥ 1.259
- Gemischte NG, Grob-Korrelierte Ggw: ≤ 2.310
- Bayes'sche grob-korrlierte Ggw: ≤ 2.927
  (Spiele mit unvollständiger Information)

Obwohl die Gebote manipuliert und nicht ehrlich sein können, liefert GSP im worst-case gute Zuweisungen, selbst für Stabilitätskonzepte mit relativ schwachen Anforderungen wie grob-korrlierte Gleichgewichte, und sogar ex-ante in Spielen mit unvollständiger Information.

Nash-Gleichgewichte im GSP-Spiel

Ansteigende Auktionen und Walras-Gleichgewicht

Ansteigende Auktionen

Die Zweitpreisauktion ist eine Auktion mit direkter Offenlegung. Oft möchten Bieter ihr wahres Gebot für das Gut aber lieber nicht offenlegen, insbesondere wenn sie das Gut am Ende evtl. für einen deutlich kleineren Preis erhalten.

Das ist ein Grund dafür, dass ansteigende Auktionen in der Praxis verbreitet sind. Dabei wird der Preis so lange um eine Schrittweite ε erhöht bis nur noch ein Bieter im Rennen ist. Dieser Bieter erhält das Gut zum Preis, zu dem der vorletzte Bieter die Auktion verlassen hat.

Die ansteigende Auktion ist eine Zweitpreisauktion ohne direkte Offenlegung. Letztlich ergeben sich die gleiche Zuweisung und (bei $\varepsilon \to 0$) auch die gleichen Zahlungen wie in der Zweitpreisauktion.

Ansteigende Auktion für mehrere Güter

Wir betrachten eine Variante für eine Menge $[m]$ von m Gütern. Die Auktion nutzt Bedarfsqueries an ein Bedarfsorakel für jeden Bieter.

Bedarfsorakel

Sei $v_i : 2^{[m]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Bewertungsfunktion für Spieler i. Ein Bedarfsorakel beantwortet Bedarfsqueries der folgenden Form:

`INPUT:` Preis $p_j \geq 0$ für jedes Gut $j \in M$

`OUTPUT:` Eine Menge $S \subseteq [m]$ von Gütern, die den Nutzen von i bei Preisen p_j maximiert. Formal: Ein Bedarf ist eine Menge S, so dass für alle $S' \subseteq [m]$ gilt

$$v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j \quad \geq \quad v_i(S') - \sum_{j \in S'} p_j \ .$$

Diese Arten von Orakelzugriff sind effizient und vorteilhaft. Spieler müssen sich nicht immer über die genaue Bewertung aller Teilmengen im Klaren sein.

Ansteigende Auktion für mehrere Güter

INPUT: Menge $[m]$ von Gütern, Menge $\mathcal{N}$ der Spieler
OUTPUT: Zuweisung $(S_1, \ldots, S_n)$ der Güter an Spieler, ein Preis $p_j \geq 0$ für jedes Gut $j \in [m]$

Initialisierung:

1. Setze $p_j \leftarrow 0$, $\forall j \in M$ und $S_i \leftarrow 0$, $\forall i \in \mathcal{N}$

Anstieg:

2. Repeat
3. Für jedes i, sei D_i ein Bedarf von i bei Preisen p_j mit: p_j für $j \in S_i$ und $p_j + \epsilon$ für $j \notin S_i$
4. If $S_i = D_i$ für jedes i, then exit loop.
5. Finde Spieler i mit $S_i \neq D_i$ und aktualisiere:
6. Für jedes $j \in D_i \backslash S_i$ setze $p_j \leftarrow p_j + \epsilon$
7. $S_i \leftarrow D_i$
8. Für jedes $k \neq i$ setze $S_k \leftarrow S_k \backslash D_i$

Ausgabe:

9. return Zuweisung $S_1, \ldots, S_n$ und Preise $p_1, \ldots, p_m$

Walras-Gleichgewicht

Wir nehmen an, dass die Bewertung $v_i(S) \geq 0$ eine ganze Zahl ist, für jeden Spieler i und jede Menge $S \subseteq [m]$.

Definition

Seien p und q zwei Preisvektoren mit $p_j \geq q_j$ für alle $j \in [m]$. Bewertung v_i eine Substitutionsbewertung wenn jeder Bedarf bei Preisen p alle Güter des Bedarfs bei q enthält, deren Preis gleich geblieben ist.

Formaler: Für jedes $S^q \in \arg\max\{v_i(S) - \sum_{j \in S} q_j\}$ gibt es ein $S^p \in \arg\max\{v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j\}$ mit $S^p \supseteq \{j \in S^q \mid p_j = q_j\}$.

Beispiele für Substitutionsbewertungen:

Additiv	$v_i(S) = \sum_{j \in S} v_{ij}$
Unit-Demand	$v_i(S) = \max_{j \in S} v_{ij}$
Konkav Multi-Unit	$v_i(S) = \sum_{j=1,\ldots,\|S\|} v_j$ mit $v_1 \geq v_2 \geq \ldots$

Definition

Ein Walras-Gleichgewicht besteht aus einer Zuweisung $(S_1, \ldots, S_n)$ von Gütern und einem Vektor $p = (p_1, \ldots, p_m)$ von nicht-negativen Preisen, so dass S_i ein Bedarf für Spieler i ist bzgl. der Preise p. Wenn ein Gut j nicht zugewiesen wird, dann hat es Preis $p_j = 0$.

Ein Walras-Gleichgewicht hat einen Preis für jedes Gut. Jeder Spieler bekommt eine Menge von Gütern, die er bei den momentanen Preisen am liebsten haben möchte. Güter, die niemand haben will, erhalten Preis 0.

Satz

Sei v_i eine ganzzahlige Substitutionsbewertung und $\varepsilon < 1/m$. Dann ist die Ausgabe der ansteigenden Auktion ein Walras-Gleichgewicht. Die Zuweisung maximiert den sozialen Nutzen $\sum_i v_i(S_i)$.

Beweis

Wir zeigen zuerst eine Behauptung: Zu jeder Zeit gilt für jeden Spieler $S_i \subseteq D_i$.

Die Behauptung gilt am Anfang, betrachte Update für Spieler i. Für i selbst gilt $S_i = D_i$ am Ende des Updates. Für $k \neq i$ können zwei Änderungen auftreten:

1. Güter wurden von i aus S_k weggenommen. Dann wird S_k kleiner, kein Einfluß auf D_k, Behauptung gilt weiterhin.
2. Preise der Güter außerhalb von S_k erhöht, aber das betrifft S_k nicht. Da v_i Substitutionsbewertung gilt: Güter, die aus D_k entfernt werden, haben erhöhten Preis, aber sie liegen nicht in S_k. Behauptung gilt weiterhin.

Güter werden also nur von anderen Spielern "gestohlen", kein Gut wird einfach "weggeworfen". Wenn also ein Gut zum ersten Mal zugewiesen wird und sich sein Preis auf > 0 erhöht, dann bleibt es für immer zugewiesen. Es gibt es kein Gut j,

- das zugewiesen ist und Preis $p_j = 0$ hat, oder
- das nicht zugewiesen ist und Preis $p_j > 0$ hat.

Optimalität der Zuweisung: Beweis als Übungsaufgabe. $\square$

Strategisches Bieten

Exposure Problem für allgemeine Bewertungen:

- Komplemente: Alice hat positive Bewertung nur für beide Schuhe
- Auktion könnte einen Schuh wegnehmen und anderem Bieter geben
- Alice verlässt die Auktion, sie hat Wert 0

Bedarfsreduktion für Substitionsbewertungen

- Walras-Gleichgewichte sind anfällig für preisantizipierende Bieter
- Bieter teilen kleinere Bedarfsmengen mit
- Preise bleiben deutlich kleiner, Nutzen ist höher als bei ehrlichem Verhalten

Signalisieren in Auktionen

- Bieter nutzen Gebote, um sich gegenseitig Nachrichten zu senden
- USWest, McLeod und Lizenz #378 in Rochester

Spektrumsauktionen

Im Gegensatz zu Sponsored Search, wo Auktionen täglich millionenfach ablaufen, werden Auktionen für Spektrum in Funknetzwerken nur sehr selten und in sehr großem Umfang durchgeführt. Hierbei wird eine Menge von Frequenzspektrum (z.T. gebündelt in Kanälen) vom Staat an Telekommunikationsanbieter versteigert. Die letzten Auktionen in Deutschland waren die Versteigerungen der Lizenzen zu Frequenzen im Bereich 700-1800 MHz im August 2015[1].

Formate wie sequentielle Ein-Kanal-Auktionen (Schweiz, 2000) oder Auktionen mit versiegeltem Gebot (Neuseeland, 1990) haben zu teilweise skurrilen Ergebnissen und Preisen geführt. Dagegen haben sich simultane ansteigende Auktionen hierbei bewährt.

[1] siehe auch
https://www.bundesnetzagentur.de/DE/Sachgebiete/Telekommunikation/Unternehmen_Institutionen/Frequenzen/Projekt2016_Frequenzauktion/projekt2016-node.html

Rückwärtsauktion der FCC 2016

In den USA wurde 2016 ein interessanter neuer Ansatz mit Rückwärtsauktion genutzt. Dabei wurden Frequenzbänder von Fernsehsendern zurückgekauft und dann neu gepackt an die Sender vergeben. Das erlaubt z.B. die zusammenhängende Zuweisung von Frequenzbändern und macht die resultierende Zuweisung deutlich kompakter. Das frei werdende Spektrum kann dann weiter verkauft werden z.B. an Mobilfunkanbieter.

Single-Parameter Modell

- n TV Sender, Sender i hat private Bewertung $v_i \geq 0$ für seinen Kanal
- Kanal wird nicht zurückgekauft, Nutzen $u_i = 0$. (i verliert),
- Kanal wird zurückgekauft zum Preis p, Nutzen $p - v_i$. (i gewinnt)

Rückwärtsauktion der FCC 2016

Für eine gültige Menge von Siegern $W \subseteq \mathcal{N}$ können die Kanäle zusammengelegt und neu gepackt werden. Ob eine Menge W gültig ist, wird durch ein Graphenfärbungsproblem entschieden, da zwei TV-Sender im gleichen Einzugsgebiet aus Interferenzgründen nicht den gleichen Kanal bekommen können. Obwohl dieses Gültigkeitsproblem i.A. NP-hart ist, wird es hier für mittelgroße Instanzen mit Ansätzen aus dem SAT-Lösen exakt gelöst.

Wie sollte die gültige Menge an Siegern in der Rückwärtsauktion gewählt werden? Für dieses Problem wurde ein Greedy Mechanismus benutzt, der sehr ähnlich ist zu dem Mechanismus, den wir für Rucksackauktionen betrachtet haben. Diesmal läuft er allerdings umgekehrt ab – Bieter werden einzeln aus der Menge der gewählten Bieter entfernt.

Deferred Allocation mit Scoring-Funktion

Deferred Allocation Regel:

1. `Setze` $W = \mathcal{N}$
2. `While` $\exists i \in W$ `mit` $W \setminus \{i\}$ `gültig`
3. `Entferne ein solches` i `aus` W
4. `return` W

Es wird ein Bieter entfernt solange die resultierende Menge noch gültig ist. Für die Wahl des Bieters kann man eine Scoring-Funktion benutzen (z.B. höchstes Gebot, höchstes Verhältnis zur Größe des Marktes). Wenn die Scoring-Funktion monoton im Gebot des Bieters und unabhängig von den anderen Geboten ist, dann wird der Mechanismus anreizkompatibel.

Literatur

- Edelman, Ostrovsky, Schwarz. Internet Advertising and the Generalized Second-Price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords. American Econonmic Review 97(1):242-259, 2007.
- Caragiannis, Kaklamanis, Kanellopoulos, Kyropoulou, Lucier, Paes Leme, Tardos. Bounding the Inefficiency of Outcomes in Generalized Second Price Auctions. Journal of Economic Theory 156:343-388, 2015.
- Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani. Algorithmic Game Theory, 2007. (Kapitel 11)
- Roughgarden. Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory, 2016. (Kapitel 8)