Strategische Spiele und Nash-Gleichgewichte

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2018

Gefangenendilemma

	S	G
S	2 2	1 5
G	5 1	4 4

- Spieler: zwei Gefangene, werden separat befragt.
- Strategien: (G)estehen, (S)chweigen
- Gestehen gibt eine geringere Strafe wenn der andere Spieler schweigt
- Wenn beide gestehen, dann ist die Strafe höher für beide (4 Jahre) als wenn sie beide schweigen (2 Jahre).

Gefangenendilemma

	S	G
S	2 2	1 5
G	5 1	4 4

- Wenn beide (S)chweigen, sind die Gesamtkosten am kleinsten.
- Wenn beide (G)estehen, sind die Kosten höher für jeden von beiden.
- Dennoch hat jeder Spieler einen Anreiz zu gestehen, egal welche der beiden Strategien der andere wählt!

Spiele in Normalform

Definition

Ein strategisches Spiel in Normalform ist ein Tripel $(\mathcal{N}, (S_i)_{i \in N}, (c_i)_{i \in N})$. Dabei ist

- $\mathcal{N}$ die Menge der Spieler, $n = |\mathcal{N}|$,
- S_i die Menge der (reinen) Strategien von Spieler i,
- $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ ist die Menge der Zustände,
- ein Zustand ist $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$,
- $c_i : S \to \mathbb{R}$ ist die Kostenfunktion von Spieler $i \in \mathcal{N}$. In Zustand s hat Spieler i die Kosten $c_i(s)$.

Hier ist $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ der Zustand s ohne Strategie s_i.

Dominante Strategien

Definition

Eine reine Strategie s_i ist eine dominante Strategie für Spieler $i \in \mathcal{N}$ wenn $c_i(s_i, s_{-i}) \leq c_i(s'_i, s_{-i})$ für jede Strategie $s'_i \in S_i$ und jedes s_{-i}.

Definition

Ein Zustand $s = (s_1, \ldots, s_n)$ ist ein Gleichgewicht in dominanten Strategien wenn $s_i \in S_i$ eine dominante Strategie ist, für jeden Spieler $i \in \mathcal{N}$.

Hat jedes strategische Spiel ein Gleichgewicht in dominanten Strategien? Nein!

Pareto-Optimalität

Definition

Ein Zustand s Pareto-dominiert einen Zustand s' (alternativ: s ist eine Pareto-Verbesserung verglichen mit s') wenn $c_i(s) \leq c_i(s')$ für jeden Spieler $i \in \mathcal{N}$ und $c_j(s) < c_j(s')$ für mindestens einen Spieler $j \in \mathcal{N}$.

Definition

Ein Zustand s heißt Pareto-Optimum oder Pareto-effizient wenn es keinen Zustand gibt, der s Pareto-dominiert.

In einem Pareto-Optimum kann kein Spieler seine Kosten strikt verringern ohne dass sich die Kosten eines anderen Spielers strikt erhöhen.

Hat jedes stategische Spiel ein Pareto-Optimum? Ja!

Kampf der Geschlechter

	Zeil	Eintracht
Zeil	2, 1	6, 6
Eintracht	5, 5	1, 2

- In Zustand (Zeil,Zeil): Präferenz Zeil für jeden von beiden.
- In Zustand (Eintracht,Eintracht): Präferenz Eintracht für jeden von beiden.

$\Rightarrow$ Keine globale Präferenz.

Was wäre ein plausibles Resultat in dieser Situation?

Reines Nash-Gleichgewicht

Definition

Eine Strategie s_i heißt eine beste Antwort auf eine Kollektion von Strategien s_{-i}, wenn $c_i(s_i, s_{-i}) \leq c_i(s_i', s_{-i})$ für alle $s_i' \in S_i$.

Beachte: s_i dominante Strategie $\Leftrightarrow$ s_i beste Antwort auf alle s_{-i}.

Definition

Ein Zustand $s = (s_1, \ldots, s_n)$ heißt Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien (oder reines Nash-Gleichgewicht), wenn s_i eine beste Antwort auf die anderen Strategien s_{-i} ist, für jeden Spieler $1 \leq i \leq n$.

Ein Nash-Gleichgewicht

- ... ist eine Kollektion von lokalen Präferenzen im Spiel.
- ... ist stabil gegen unilaterale Abweichungen.

Hat jedes Spiel in Normalform ein reines Nash-Gleichgewicht? Nein!

Stein-Papier-Schere (Rock-Paper-Scissors)

	R	P	S
R	0 0	-1 1	1 -1
P	1 -1	0 0	-1 1
S	-1 1	1 -1	0 0

Stein-Papier-Schere (Rock-Paper-Scissors)

	R	P	S
R	0 $\downarrow\rightarrow$ 0	-1 $\downarrow$ 1	1 $\leftarrow$ -1
P	1 $\rightarrow$ -1	0 $\downarrow\rightarrow$ 0	-1 $\uparrow$ 1
S	-1 $\uparrow$ 1	1 $\leftarrow$ -1	0 $\leftarrow\uparrow$ 0

Gemischte Strategien

Definition

Eine gemischte Strategie x_i für Spieler i ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Menge der reinen Strategien S_i.

In endlichen Spielen gilt für x_i, dass $x_{ij} \in [0,1]$ und $\sum_{j \in S_i} x_{ij} = 1$.

Die Kosten eines gemischten Zustands für Spieler i sind

$$c_i(x) = \sum_{s \in S} p(s) \cdot c_i(s) \quad ,$$

wobei

$$p(s) = \prod_{i \in \mathcal{N}, j = s_i} x_{ij}$$

die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich am Ende der (reine) Zustand s als Resultat ergibt.

Gemischtes Nash-Gleichgewicht

Definition

Eine (gemischte) beste Antwort x_i auf eine Kollektion von gemischten Strategien x_{-i} erfüllt $c(x_i, x_{-i}) \leq c_i(x'_i, x_{-i})$ für jede andere gemischte Strategie x'_i.

Definition

Ein gemischter Zustand x heißt Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien (oder gemischtes Nash-Gleichgewicht), wenn x_i eine beste Antwort auf x_{-i} ist, für jeden Spieler $1 \leq i \leq n$.

Bemerkung:

- Jede reine Strategie ist eine gemischte Strategie.
- Jedes reine Nash-Gleichgewicht ist eine gemischtes Nash-Gleichgewicht.

Beispiel

	0.3	0.7	
0.2	2 1	3 2	$0.3 \cdot 1 + 0.7 \cdot 2$ $= 0.3 + 1.4$ $= 1.7$
0.8	4 1	2 5	$0.3 \cdot 1 + 0.7 \cdot 5$ $= 0.3 + 3.5$ $= 3.8$
	$0.2 \cdot 2 + 0.8 \cdot 4$ $= 0.4 + 3.2$ $= 3.6$	$0.2 \cdot 3 + 0.8 \cdot 2$ $= 0.6 + 1.6$ $= 2.2$	

- $c_1(x) = 1.7 \cdot 0.2 + 3.8 \cdot 0.8 > 1.7$ – beste Antwort ist $(1, 0)$
- $c_2(x) = 3.6 \cdot 0.3 + 2.2 \cdot 0.7 > 2.2$ – beste Antwort ist $(0, 1)$
- Zustand x mit $x_1 = (0.2, 0.8)$ und $x_2 = (0.3, 0.7)$ ist kein gemischtes Nash-Gleichgewicht.

Beobachtung

Im obigen Beispiel ist x kein gemischtes Nash-Gleichgewicht, weil mindestens ein Spieler mit positiver Wahrscheinlichkeit eine suboptimale Strategie auswählt.

Fakt

Wenn $x_{ij} > 0$ in einer gemischten besten Antwort x_i auf x_{-i}, dann ist j eine reine beste Antwort auf x_{-i}.

Die Kosten von x_i sind ein *gewichtetes Mittel* von Kosten für die reinen Strategien. Dies gewichtete Mittel ist minimal $\Leftrightarrow$ Es wird nur über reine Strategien mit minimalen Kosten gemittelt.

Beispiel

	1	0	
1	2 / 1	3 / 2	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$
0	4 / 1	2 / 5	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 = 1$
	$1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 2$	$1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 3$	

- Zustand x mit $x_1 = (1,0)$ und $x_2 = (1,0)$ ist ein reines (und somit auch gemischtes) Nash-Gleichgewicht.

Beispiel

	1	0	
$\frac{2}{3}$	2 / 1	3 / 2	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$
$\frac{1}{3}$	4 / 1	2 / 5	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 = 1$
	$\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}$	

- Zustand x mit $x_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ und $x_2 = (1, 0)$ ist ein gemischtes Nash-Gleichgewicht.
- Für den Reihenspieler ist die obere Strategie eine dominante Strategie, aber in der ersten Spalte ist sie nicht *strikt* besser. Wenn sie in jeder Spalte strikt besser wäre, dann würde die untere Strategie in keinem gemischten Nash-Gleichgewicht gespielt. (Warum?)

Satz von Nash

Satz (Satz von Nash)

Jedes endliche strategische Spiel hat mindestens ein gemischtes Nash-Gleichgewicht.

Wir nutzen den Fixpunktsatz von Brouwer zum Beweis.

Satz (Fixpunktsatz von Brouwer)

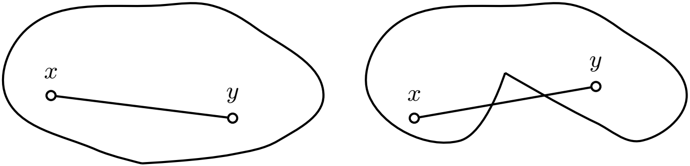
Jede stetige Funktion $f : D \to D$, die eine kompakte und konvexe Menge $D \subseteq \mathbb{R}^m$ auf sich selbst abbildet, hat mindestens einen Fixpunkt $x^* \in D$ mit $f(x^*) = x^*$.

Brouwers Fixpunktsatz: Vorraussetzungen und Definitionen

- Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^m$ ist konvex genau dann wenn für jedes $x, y \in D$ und jedes $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$.
- Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^m$ ist kompakt genau dann wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
- Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ist beschränkt genau dann wenn es eine ganze Zahl $M \geq 0$ gibt mit $D \subseteq [-M, M]^m$.
- Betrachte eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine Folge $x_0, x_1, \ldots$, so dass für alle $i \geq 0$ gilt $x_i \in D$ und $x \in \mathbb{R}^m$ existiert mit $x = \lim_{i \to \infty} x_i$ (d.h., für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine ganze Zahl $k > 0$ mit $||x - x_j||_2 < \epsilon$ für alle $j > k$). Eine Menge D ist abgeschlossen wenn $x \in D$ für jede solche Folge.
- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist stetig am Punkt $x \in D$ wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $y \in D$ gilt: Wenn $||x - y||_2 < \delta$, dann $||f(x) - f(y)||_2 < \epsilon$. f heißt stetig wenn sie an jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Brouwers Fixpunktsatz: Vorraussetzungen und Definitionen

- Konvex/Nicht Konvex:

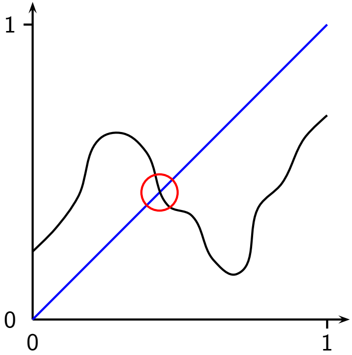


- Abgeschlossen und Beschränkt:
  $[0,1]^2$ ist abgeschlossen und beschränkt.
  $[0,1)$ ist nicht abgeschlossen (und nicht offen), aber beschränkt.
  $[0,\infty)$ ist abgeschlossen und unbeschränkt.

- Stetigkeit: Klar.

Brouwers Fixpunktsatz: Beispiel

Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ hat einen Fixpunkt:



Für $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$: Papierknäuel

Satz von Nash

Satz (Satz von Nash)

Jedes endliche strategische Spiel hat mindestens ein gemischtes Nash-Gleichgewicht.

Beweis:

Zuerst prüfen wir die Bedingungen für den Fixpunktsatz.

Fakt

Die Menge X der gemischten Zustände $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in einem endlichen strategischen Spiel ist eine konvexe, kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ mit $m = \sum_{i=1}^n m_i$ und $m_i = |S_i|$.

Wir definieren eine stetige Funktion $f : X \to X$, die jeden gegebenen Zustand in einen anderen Zustand transformiert. Die Fixpunkte von f werden genau die gemischten Nash-Gleichgewichte des Spiels sein.

Eigenschaften von Nash-Gleichgewichten

Zur Erinnerung:

- Ein gemischtes Nash-Gleichgewicht x ist eine Kollektion von gemischten besten Antworten x_i.
- Wenn $x_{ij} > 0$ in einer besten Antwort x_i auf x_{-i}, dann ist $j \in S_i$ eine reine beste Antwort auf x_{-i}.
- Eine Kollektion von besten Antworten (also ein gemischtes Nash-Gleichgewicht) $x = (x_1, ..., x_n)$ erfüllt

$$c_i(x) - c_i(j, x_{-i}) \leq 0 \qquad \text{für jedes } j \in S_i \text{ und jedes } i \in \mathcal{N}.$$

Satz von Nash: Definition

- Für einen gemischten Zustand x sei

$$\phi_{ij}(x) = \max\{0, c_i(x) - c_i(j, x_{-i})\} \ .$$

- Sei $f : X \to X$ mit $f(x) = x' = (x'_1, ..., x'_n)$ gegeben durch

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} + \phi_{ij}(x)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(x)}$$

für jedes $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, ..., m_i$.

Fakt

f erfüllt die Voraussetzungen von Brouwers Fixpunktsatz: f ist stetig und wenn $x \in X$, dann ist $f(x) = x' \in X$ ein gemischter Zustand.
(evtl. als Übungsaufgabe)

Beispiel

- Spieler i hat 3 reine Strategien
- Momentane gemischte Strategie $x_i = (0.2, 0.5, 0.3)$
- Momentane Kosten der Strategien $c_i(\cdot, x_{-i}) = (2.2, 4.2, 2.2)$
- Momentane Kosten $c(x_i, x_{-i}) = 3.2$
- Unter diesen Umständen wird Strategie x_i abgebildet auf x_i':

x_{ij}	$c_i(j, x_{-i})$	$\phi_{ij}(x)$	x'_{ij}
0.2	2.2	1	$\frac{0.2+1}{1+2} = 0.4$
0.5	4.2	0	$\frac{0.5+0}{1+2} \approx 0.166$
0.3	2.2	1	$\frac{0.3+1}{1+2} \approx 0.434$

Satz von Nash: Fixpunkte

Mit Brouwers Satz wissen wir, dass ein x^* mit $f(x^*) = x^*$ existiert. Wir müssen zwei Richtungen zeigen:

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ ist gemischtes Nash-Gleichgewicht}$$

Leicht: x ist gemischtes Nash-Gleichgewicht $\Rightarrow f(x) = x$: Jedes $\phi_{ij}(x) = 0$.

Bleibt: $x^* = f(x^*) \Rightarrow x^*$ ist gemischtes Nash-Gleichgewicht.

Fixpunkte als Nash-Gleichgewichte

Für jedes $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m_i$ gilt

$$x^*_{ij} = \frac{x^*_{ij} + \phi_{ij}(x^*)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(x^*)} \quad ,$$

daher

$$x^*_{ij} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(x^*)\right) = x^*_{ij} + \phi_{ij}(x^*) \quad ,$$

und

$$x^*_{ij} \sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(x^*) = \phi_{ij}(x^*) \quad .$$

Wir werden zeigen, dass $\sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(x^*) = 0$. Das heißt, dass in x^*_i nur reine beste Antworten positive Wahrscheinlichkeit erhalten, also ist x^*_i eine gemischte beste Antwort.

Fixpunkte als Nash-Gleichgewichte

Behauptung

Für jeden gemischten Zustand x und jeden Spieler $i \in \mathcal{N}$ gibt es eine reine Strategie $j \in S_i$ mit $x_{ij} > 0$ und $\phi_{ij}(x) = 0$.

Beweis der Behauptung:
$c_i(x) = \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \cdot c_i(j, x_{-i})$, daher muss es ein j geben mit $x_{ij} > 0$ und Kosten mindestens so hoch wie das *gewichtete Mittel*.

Formal gibt es j mit $x_{ij} > 0$ und

$$c_i(x) - c_i(j, x_{-i}) \leq 0 \ .$$

Daher gilt $\phi_{ij}(x) = \max\{0, c_i(x) - c_i(j, x_{-i})\} = 0$. $\square$

Fixpunkte als Nash-Gleichgewichte

Für jeden Spieler i betrachten wir Strategie j aus der Behauptung. Das bedeutet $x^*_{ij} > 0$ und

$$x^*_{ij} \cdot \sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(x^*) = \phi_{ij}(x^*) = 0 \ .$$

Da $x^*_{ij} > 0$, ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{m_i} \phi_{ik}(x^*) = 0 \ ,$$

und daher $\phi_{ik}(x^*) = 0$ for all $k = 1, \ldots, m_i$. Daraus folgt

$$c_i(x^*) \leq c_i(j, x^*_{-i}) \qquad \text{for all } j \in S_i.$$

Das bedeutet, dass x^*_i eine beste Antwort ist, und der Satz von Nash ist gezeigt. $\square$

Berechnung von gemischten Nash-Gleichgewichten

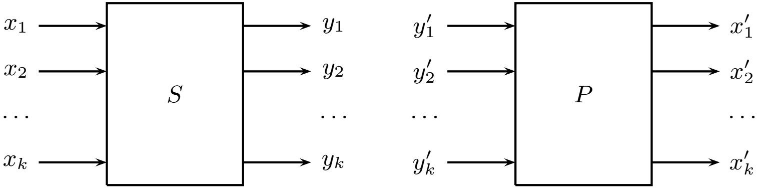
Wie können wir ein gemischtes Nash-Gleichgewicht berechnen?
Was ist die Komplexität des Problems?

Diese Problemstellung ist anders als die, die wir normalerweise betrachten:

- Keine Optimierung, Entscheidung trivial (da Existenz garantiert)
- Suchproblem, finde ein Nash-Gleichgewicht.
- Andere Komplexitätsklasse: PPAD
  (polynomial parity argument, directed case)
- Konzept der PPAD-Vollständigkeit (ähnlich wie bei NP):
  Definiere PPAD-vollständiges Problem, konstruiere Reduktionen in Polynomialzeit

Es gibt Spiele mit 3 Spielern und rationalen Kostenwerten, in denen alle gemischten Nash-Gleichgewichte irrationale Einträge haben. Daher können wir numerisch immer nur Approximationen von gemischten Nash-Gleichgewichten oder Fixpunkten berechnen.

Ein PPAD-vollständiges Problem

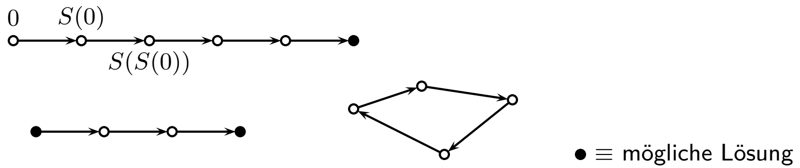


Eine Instanz des END-OF-LINE Suchproblems:

- Zwei Schaltkreise S und P, gleiche Anzahl Input- und Output-Bits
- S und P definieren einen gerichteten Graphen:
  Knoten: k-Bit-Vektoren
  Kanten: Die gerichtete Kante (x, y) existiert wenn $S(x) = y$ und $P(y) = x$
- Ausnahme: Der 0-Vektor hat keine eingehende Kante!

Problem: Finde eine Quelle (keine eingehende Kante) oder Senke (keine ausgehende Kante) im Graphen, die nicht der 0-Vektor ist.

END-OF-LINE



Beobachtungen:

- Jeder Knoten hat Eingangsgrad und Ausgangsgrad ≤ 1.
- Durch Paritätsargument hat END-OF-LINE immer eine Lösung.
- Nicht notwendigerweise das Ende des Pfades, der bei 0 startet. Diese spezielle Senke zu finden ist PSPACE-vollständig.
- Die END-OF-LINE Instanz ist nur durch die Schaltkreise S und P gegeben. Der Graph ist exponentiell groß in der Eingabe.

Eine Lösung für END-OF-LINE zu finden ist PPAD-vollständig.
Es wird vermutet, dass kein effizienter Algorithmus für dieses Problem existiert.

Finden von (approximativen) Brouwer-Fixpunkten

Lemma

Das Finden eines (approximaten) gemischten Nash-Gleichgewichts ist in PPAD.

Beweisskizze:

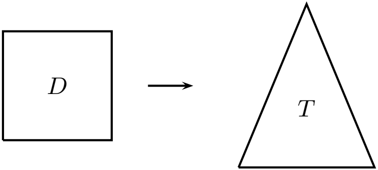
- Reduktion: Finden von Brouwer-Fixpunkten mit END-OF-LINE
- Aufteilung des Raumes in endliche Anzahl kleinerer Bereiche
- Finde einen Bereich der dem Fixpunkt ähnelt (Approximation)
- Stetigkeit: Feinere Aufteilung ergibt präzisere Approximation.

Teile den Raum in Simplizes ("multidimensionale Dreiecke") und färbe Knoten aufgrund der Richtung der Fixpunkt-Funktion

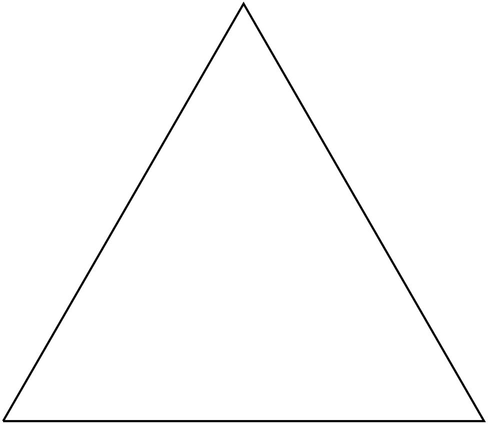
Wir beschränken uns hier zur einfachen Darstellung auf Probleme mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$, z.B., $f : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^2$.

Dreiecke

Der Einfachheit halber transformieren wir die Representation von $[0,1]^2$ in ein Dreieck T. Äquivalentes Fixpunktproblem mit $f' : T \to T$.

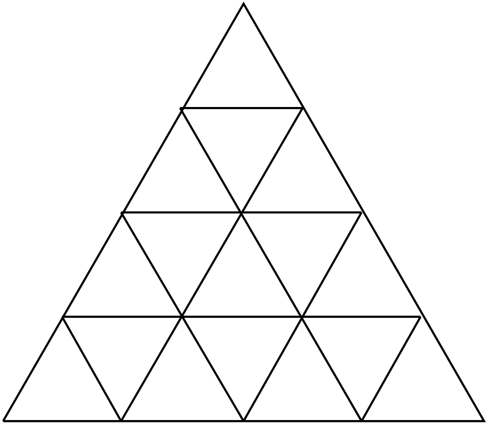


Unterteilung und Färbung



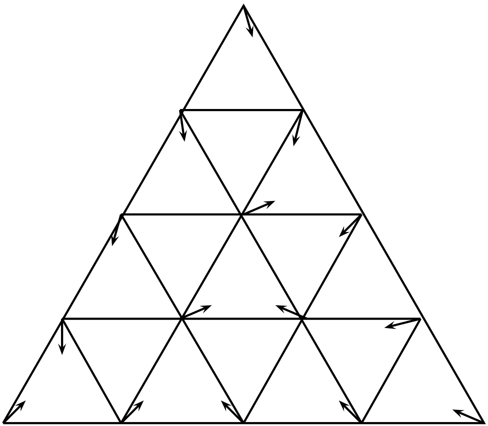
- Das Dreieck T wird unterteilt in kleinere Dreiecke

Unterteilung und Färbung



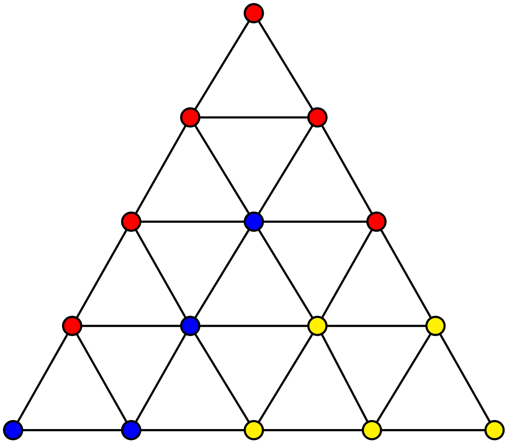
- Das Dreieck T wird unterteilt in kleinere Dreiecke
- Für jeden Eckpunkt betrachte seine Abbildung unter f' und die Richtung, in der diese Abbildung liegt

Unterteilung und Färbung



- Das Dreieck T wird unterteilt in kleinere Dreiecke
- Für jeden Eckpunkt betrachte seine Abbildung unter f' und die Richtung, in der diese Abbildung liegt
- Abhängig von der Richtung erhält der Eckpunkt eine Farbe.

Unterteilung und Färbung



- Das Dreieck T wird unterteilt in kleinere Dreiecke
- Für jeden Eckpunkt betrachte seine Abbildung unter f' und die Richtung, in der diese Abbildung liegt
- Abhängig von der Richtung erhält der Eckpunkt eine Farbe.
- Mit steigender Granularität werden die dreifarbigen Dreiecke die Fixpunkte von f'.

Sperner-Färbung

Definition
Ein unterteiltes Dreieck ist eine Unterteilung eines Dreiecks in kleinere Dreiecke.

Definition
Eine Sperner-Färbung der Eckpunkte eines unterteilten Dreiecks erfüllt:

- Jeder extremale Eckpunkt erhält eine andere Farbe.
- Ein Eckpunkt an einer Außenkante des großen Dreiecks erhält eine Farbe der zwei Eckpunkte der Außenkante.
- Innere Eckpunkte können beliebig gefäbt sein.

Beachte: Die Färbung basierend auf den Richtungen der Fixpunktfunktion f' ist eine Sperner-Färbung.

Sperners Lemma

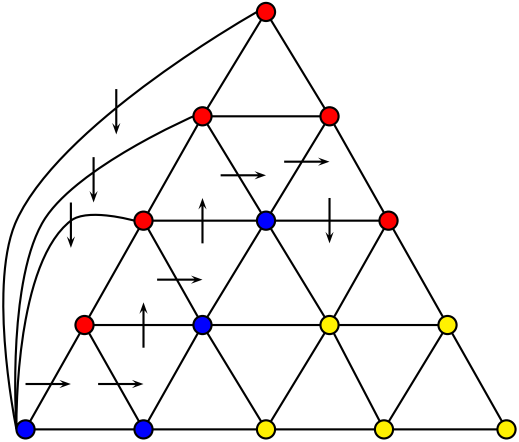
Lemma (Sperners Lemma)

Jede Sperner-Färbung eines unterteilten Dreiecks hat ein dreifarbiges Dreieck.

Beweis:

- Verbinde alle Eckpunkte auf der blau-roten Außenkante zum blauen extremalen Eckpunkt. Starte auf der Außenseite und bewege Dich über Linien, die einen blauen und einen roten Punkt verbinden. Es gibt maximal 2 dieser Linien in jedem kleinen Dreieck, wir besuchen kein Dreieck doppelt.
- Das ergibt eine Instanz von END-OF-LINE:
  Knoten: Kleine Dreiecke
  Kanten: Es gibt eine gerichtete Kante wenn zwei kleine Dreiecke eine gemeinsame Linie zwischen einem roten und einem blauen Eckpunkt haben.
- Durch die Konstruktion Eingangs- und Ausgangsgrad ≤ 1
- Es gibt eine Quelle durch Konstruktion, andere Quellen/Senken sind dreifarbige Dreiecke. □

Beweis durch END-OF-LINE



Konsequenzen und Resultate

Sperners Lemma ist eine *diskretisierte Version des Fixpunktsatzes von Brouwer*. Der Beweis des Lemmas...

- zeigt, dass Sperner-Färbungen Instanzen von END-OF-LINE sind.
- kann auf mehr Dimensionen und Simplizes verallgemeinert werden. Hier werden dreifarbige Dreiecke zu Simplizes mit maximaler Anzahl an Farben.
- mit "unendlicher Granularität" zeigt, dass maximal gefärbte Simplizes den Brouwer-Fixpunkten entsprechen.

Damit ist das Finden eines Fixpunktes, und somit auch eines gemischten Nash-Gleichgewichtes in einem endlichen Spiel, in der Klasse PPAD. □

Ein fundamentales Resultat in der Literatur zeigt darüber hinaus:

Theorem (Daskalakis/Papadimitriou und Chen/Deng/Teng)

Das Finden eines gemischten Nash-Gleichgewichts in einem endlichen Spiel mit 2 Spielern ist PPAD-vollständig.

Spiele in Normalform

Komplexität gemischter Nash-Gleichgewichte

Nullsummenspiele

Appendix: LP-Dualität

Definition

Um konsistent mit der Literatur zu bleiben, betrachten wir in diesem Abschnitt Nutzenfunktionen für Spieler anstelle von Kostenfunktionen.

Definition

Der Nutzen oder die Utility von Spieler i im Zustand s eines Spiels in Normalform ist $u_i(s) = -c_i(s)$.

Definition

Ein Nullsummenspiel ist ein strategisches Spiel, bei dem für jeden Zustand s gilt $\sum_{i \in \mathcal{N}} u_i(s) = 0$.

In einem Nullsummenspiel ist jeder Nutzenzuwachs für einen Spieler verbunden mit einem Nutzenverlust für einen anderen Spieler. Spiele dieser Art ergeben sich z.B. wenn Spieler gegeneinander um einen Sieg kämpfen, oder wenn sie ein gemeinsames Gut unter sich aufteilen sollen.

Nullsummenspiele mit 2 Spielern

Zwei Spieler, Spieler I (Reihenspieler), Spieler II (Spaltenspieler)

Representation als Matrix $A \in \mathbb{Z}^{k \times \ell}$ mit $k = |S_{\mathtt{I}}|$ Reihen und $\ell = |S_{\mathtt{II}}|$ Spalten:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1\ell} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2\ell} \\ & & & & & \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ & & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & . & . & . & a_{k\ell} \end{pmatrix}$$

a_{ij} ist der Nutzenwert für Spieler I
$-a_{ij}$ ist der Nutzenwert für Spieler II

Beispiele

Matching Pennies

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rock-Paper-Scissors

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein Spiel mit $k \neq \ell$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Nutzenwert als Matrix-Multiplikation

Wir bezeichnen gemischte Strategien mit x für $\mathtt{I}$ und y für $\mathtt{II}$.

Berechnung des Nutzens $u_{\mathtt{I}}(x,y)$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ \hline 0.8 & 0 & 2 & 4 \\ 0.2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 0.8 \cdot (0.1 \cdot 0 + 0.4 \cdot 2 + 0.5 \cdot 4) \\ + 0.2 \cdot (0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.5 \cdot 3) \\ = 2.48 \end{array}$$

$$\begin{aligned} u_{\mathtt{I}}(x,y) = -u_{\mathtt{II}}(x,y) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} x_i a_{ij} y_j \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= x^T A y \end{aligned}$$

Öffentliche Stratgiewahl

Wir nehmen an, `I` muss sich zuerst entscheiden. Er wählt eine gemischte Strategie, die `II` sehen kann *bevor* er seine eigene Wahl trifft. Wie sollte `I` diese öffentliche Strategie wählen?

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

`II` wird `I` so stark wie möglich verletzen.

In diesem Spiel wird `II` immer mit Spalte 1 antworten. Daher ist die optimale Wahl für `I` die reine Strategie 2 (bzw: $x = (0,1)^T$).

Maximin-Strategien

I wählt x, dann wählt II y als beste Antwort auf x. II löst also das Problem $\max_y u_{\texttt{II}}(x,y)$, oder in Matrixform $\max_y -x^T Ay = \min_y x^T Ay$.

Folglich sucht I nach einer Strategie x, die $\min_y x^T Ay$ maximiert.

Definition

Der Gain-Floor eines Nullsummenspiels mit 2 Spielern ist

$$v_{\texttt{I}}^* = \max_x \min_y x^T Ay \quad .$$

Eine Strategie x^*, die den Gain-Floor als Nutzen liefert, ist eine optimale Strategie (oder auch Maximin-Strategie) für I.

Beispiel Maximin

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

II wird I so stark wie möglich verletzen.

- I wählt Reihe 1 $\Rightarrow$ II wählt Spalte 2 $\Rightarrow$ I hat Nutzen 1
- I wählt Reihe 2 $\Rightarrow$ II wählt Spalte 1 $\Rightarrow$ I hat Nutzen 1

- I wählt $x = (0.5, 0.5)$, minimaler Verlust für II ist 2.5 in Spalten 2 und 3

$\Rightarrow$ I hat Nutzen 2.5.

Wie sieht die optimale Strategie x^* aus, wie groß kann v_{I}^* werden?

Duale Sichtweise: Minimax

Nun nehmen wir an, II wählt zuerst y, dann wählt I x optimal mit $\max_x u_{\mathtt{I}}(x,y) = \max_x x^T Ay$.

Folglich sucht II nach y, um $\max_x x^T Ay$ zu minimieren.

Definition

Die Loss-Ceiling eines Nullsummenspiels mit 2 Spielern ist

$$v^*_{\mathtt{II}} = \min_y \max_x x^T Ay \quad .$$

Eine Strategie y^*, die die Loss-Ceiling als Nutzen liefert, ist eine optimale Strategie (oder auch Minimax-Strategie) für II.

Wie sieht y^* aus, wie klein kann $v^*_{\mathtt{II}}$ werden?

Welche Beziehung haben $v^*_{\mathtt{I}}$ und $v^*_{\mathtt{II}}$?

Minimax Theorem

Wenn beide Spieler optimal spielen, dann sollte $\texttt{I}$ mindestens $v_{\texttt{I}}^*$ erhalten und $\texttt{II}$ nicht mehr als $v_{\texttt{II}}^*$ verlieren. Es ist einfach einzusehen, dass

Lemma

Es gilt $v_{\texttt{I}}^* \leq v_{\texttt{II}}^*$.

Überraschenderweise haben von Neumann and Morgenstern gezeigt

Satz (Minimax Theorem)

In jedem Nullsummenspiel mit 2 Spielern gilt $v = v_{\texttt{I}}^* = v_{\texttt{II}}^*$. *Der Wert* v *wird* *Wert des Spiels* *genannt.*

Minimax Theorem und Dualität in der Linearen Optimierung

Betrachte das Optimierungsproblem, bei dem wir x^* und $v_{\mathtt{I}}^* = \max_x \min_y x^T Ay$ finden sollen.

Beobachtungen:

- $\mathtt{II}$ wählt eine beste Antwort y auf x.
- Für ein gegebenes x wählt $\mathtt{II}$ $y_j > 0$ nur dann wenn in Spalte j der erwartete Verlust $\sum_{i=1}^k x_i a_{ij}$ minimal ist.
- Daher gilt

$$v_{\mathtt{I}} = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{k} x_i a_{ij} y_j = \min_{j=1,\ldots,\ell} \sum_{i=1}^{k} x_i a_{ij}$$

- Für jedes x und den resultierenden Nutzen $v_{\mathtt{I}}$ von $\mathtt{I}$ wissen wir daher

$$v_{\mathtt{I}} \leq \sum_{i=1}^{k} x_i a_{ij} \qquad \text{für alle } j = 1, \ldots, \ell.$$

Gain-Floor Optimierung als ein Lineares Programm

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{Maximiere} & v_{\mathrm{I}} & & & & \\
\text{so dass} & v_{\mathrm{I}} - \sum_{i=1}^{k} x_i a_{ij} & \leq & 0 & \text{für alle } j = 1, \ldots, \ell & \\
& \sum_{i=1}^{k} x_i & = & 1 & & (1) \\
& x_i & \geq & 0 & \text{für alla } i = 1, \ldots, k & \\
& v_{\mathrm{I}} & \in & \mathbb{R} & &
\end{array}
$$

Loss-Ceiling Optimierung als ein Lineares Programm

Die gleichen Argumente ergeben ein lineares Programm für die Minimierung der Loss-Ceiling.

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Minimiere} & v_{\mathrm{II}} & & & \\
\text{so dass} & v_{\mathrm{II}} - \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} y_j & \geq & 0 & \text{für alle } i = 1, \ldots, k \\
 & \sum_{j=1}^{\ell} y_j & = & 1 & \\
 & y_j & \geq & 0 & \text{für alle } j = 1, \ldots, \ell \\
 & v_{\mathrm{II}} & \in & \mathbb{R} &
\end{array}
\qquad (2)
$$

Im Appendix wird gezeigt, dass dies lineare Programm dual ist zum LP (1) für Gain-Floor-Maximierung.

Folgerungen

Das Finden optimaler Strategien für `I` und `II` kann durch duale lineare Programme formuliert werden.

Starke Dualität in der Linearen Optimierung:

- Betrachte ein lineares Programm mit einer gültigen Optimallösung
- Sei f^* der optimale Wert der Zielfunktion
- Dann hat das duale Programm eine gültige Optimallösung mit Zielfunktionswert g^*
- Starke Dualität: Es gilt $f^* = g^*$.

Starke Dualität liefert das Minimax-Theorem. □

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llrcl} \text{Max.} & v_{\mathrm{I}} & & & \\ \text{s.t.} & v_{\mathrm{I}} - 5x_1 - 1x_2 & & \leq & 0 \\ & v_{\mathrm{I}} - 1x_1 - 4x_2 & & \leq & 0 \\ & v_{\mathrm{I}} - 2x_1 - 3x_2 & & \leq & 0 \\ & & x_1 + x_2 & = & 1 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & v_{\mathrm{I}} & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

$$x^* = (0.4, 0.6)$$
$$v_{\mathrm{I}}^* = 2.6$$

$$\begin{array}{llrcl} \text{Min.} & v_{\mathrm{II}} & & & \\ \text{s.t.} & v_{\mathrm{II}} - 5y_1 - 1y_2 - 2y_3 & & \geq & 0 \\ & v_{\mathrm{II}} - 1y_1 - 4y_2 - 3y_3 & & \geq & 0 \\ & & y_1 + y_2 + y_3 & = & 1 \\ & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \\ & & v_{\mathrm{II}} & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

$$y^* = (0.2, 0, 0.8)$$
$$v_{\mathrm{II}}^* = 2.6$$

Ist (x^*, y^*) ein gemischtes Nash-Gleichgewicht?

Gemischtes Nash-Gleichgewicht

Korollar

(x, y) *im Nullsummenspiel mit 2 Spielern ist gemischtes Nash-Gleichgewicht*
$\Leftrightarrow$ x *und* y *sind optimale Strategien.*

Beweis ($\Rightarrow$):

- Betrachte (x, y). Sei x suboptimal (Beweis ähnlich für y suboptimal)
- Es gibt y' mit $u_{\mathtt{II}}(x, y') > -v$, daher $u_{\mathtt{I}}(x, y') < v$.
- Für NG muss gelten $u_{\mathtt{II}}(x, y) \geq u_{\mathtt{II}}(x, y')$, daher $u_{\mathtt{I}}(x, y) < v$.
- Wenn $u_{\mathtt{I}}(x, y) < v$, dann I besser mit optimaler Strategie $\Rightarrow$ (x, y) kein gemischtes NG.

($\Leftarrow$):

- Seien beide Strategien optimal, aber I hat eine bessere beste Antwort x'
- Das bedeutet $u_{\mathtt{I}}(x', y) > v$, aber dann ist y suboptimal für II
- Gleiches Argument wenn II eine bessere Strategie hat.

Gemischtes Nash-Gleichgewicht

Korollar

Jedes gemischte Nash-Gleichgewicht in einem Nullsummenspiel mit 2 Spielern ergibt den gleichen erwarteten Nutzen von v $(-v)$ für I *(*II*).*

Es gibt effiziente Algorithmen zur Lösung von linearen Programmen. Wenn wir damit die linearen Programme (1) und (2) lösen, erhalten wir optimale Strategien. Damit ergibt sich folgendes Resultat:

Satz

In jedem Nullsummenspiel mit 2 Spielern kann ein gemischtes Nash-Gleichgewicht in polynomieller Zeit berechnet werden.

Literatur

- G. Owen. Game Theory. Academic Press, 2001. (Kapitel 1 + 2)
- Nisan et al. Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, 2007. (Kapitel 1 + 2)
- J. Nash. Non-cooperative Games. Annals of Mathematics 54, pp. 286–295, 1951.
- P. Goldberg, C. Daskalakis, C. Papadimitriou. The Complexity of Computing a Nash Equilibrium. SIAM Journal on Computing, 39(1), pp. 195–259, 2009.
- X. Chen, X. Deng, S.-H. Teng. Settling the Complexity of Computing Two-Player Nash Equilibria. Journal of the ACM, 56(3), 2009.
- Hintergrund zu Linearer Optimierung, Dualität, und Algorithmen: Cormen, Leiserson, Rivest, Stein. Introduction to Algorithms, 3rd edition. MIT Press, 2009. (Kapitel 29)

Konstruktion des Dualen

Wir leiten eine obere Schranke auf $v_{\mathtt{I}}$ her für jede Lösung von (1).

- Sei $(v_{\mathtt{I}}, x)$ eine Lösung von (1).
- Wir nutzen eine lineare Kombination der Constraints für die obere Schranke. Mit Faktoren z_j und $w_{\mathtt{I}}$ ergibt sich:

$$\begin{array}{rcll} z_j \cdot \left(v_{\mathtt{I}} - \sum_{i=1}^k x_i a_{ij}\right) & \leq & z_j \cdot 0 & \text{für jedes } j \text{ und} \\ w_{\mathtt{I}} \cdot \sum_{i=1}^k x_i & = & w_{\mathtt{I}} \cdot 1 & \end{array}$$

Wir nehmen $z_j \geq 0$, um die richtige Richtung der Ungleichung einzuhalten.

Konstruktion des Dualen

- Jetzt leiten wir obere Schranke her mit einer Linearkombination:

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{I}} &\leq \sum_{j=1}^{\ell} z_j \left(v_{\mathrm{I}} - \sum_{i=1}^{k} x_i a_{ij} \right) + w_{\mathrm{I}} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\ell} z_j \right) \cdot v_{\mathrm{I}} + \sum_{i=1}^{k} \left(w_{\mathrm{I}} - \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} z_j \right) \cdot x_i \\
&\leq \sum_{j=1}^{\ell} z_j \cdot 0 + w_{\mathrm{I}} \cdot 1 \;=\; w_{\mathrm{I}}
\end{aligned}
$$

- Das klappt nur, wenn die erste Ungleichung erfüllt ist, und das ist der Fall, wenn die folgenden Bedingungen für die Koeffzienten der v_{I} und x_i auf der linken und rechten Seite gelten:

$$
\begin{array}{rclr}
1 & = & \sum_{j=1}^{\ell} z_j & \text{(Gleich da } v_{\mathrm{I}} \in \mathbb{R}.) \\
0 & \leq & w_{\mathrm{I}} - \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} z_j & \text{(Evtl größer da } x_i \geq 0.)
\end{array}
$$

Was ist die beste obere Schranke $w_{\mathcal{I}}$, die wir so erreichen können?

Finde die beste obere Schranke

$$\begin{array}{llcll} \text{Minimize} & w_{\mathtt{I}} & & & \\ \text{subject to} & w_{\mathtt{I}} - \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} z_j & \geq & 0 & \text{for all } i = 1, \ldots, k \\ & \sum_{j=1}^{\ell} z_j & = & 1 & \\ & z_j & \geq & 0 & \text{for all } j = 1, \ldots, \ell \\ & w_{\mathtt{I}} & \in & \mathbb{R} & \end{array} \qquad (3)$$

Dieses lineare Programm wird das duale Programm von (1) genannt, $w_{\mathtt{I}}$ und z_j sind die dualen Variablen.

Beachte: Dies repräsentiert genau das Optimierungsproblem (2), die Loss-Ceiling und eine optimale Strategie für $\mathtt{II}$ zu finden (mit $w_{\mathtt{I}} = v_{\mathtt{II}}$ and $z_j = y_j$)!