Preis der Anarchie und Preis der Stabilität

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2018

Erinnerung: Preis der Anarchie

Preis der Anarchie für reine Nash-Gleichgewichte:

- Strategisches Spiel Γ, soziale Kosten $cost(s)$ für Zustand s von Γ
- Betrachte Σ^{RNG} als die Menge der reinen Nash-Gleichgewichte von Γ
- Preis der Anarchie ist das Verhältnis:

$$PoA = \frac{\max_{s' \in \Sigma^{RNG}} cost(s')}{\min_{s \in \Sigma} cost(s)}$$

PoA quantifiziert die Verschlechterung des teuersten NG im Vergleich zum optimalen Zustand des Spiels.

Annahme

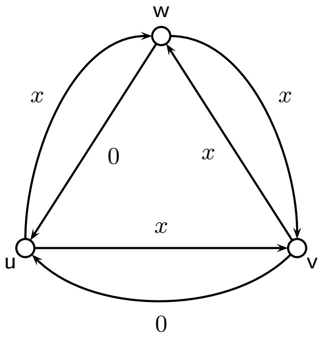
Wir betrachten hier nur $cost(s) = \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(s)$.

Gibt es eine Technik, mit der sich der Preis der Anarchie in vielen Spielen bestimmen läßt?

Auslastungsspiele mit linearen Verzögerungsfunktionen

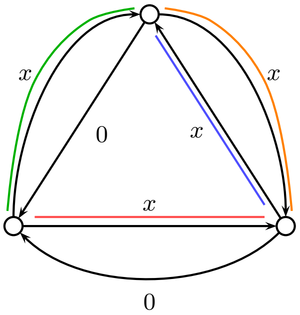
PoA in Auslastungsspielen mit $d_r(x) = a_r \cdot x$, für $a_r \geq 0$:

Im folgenden Spiel gibt es 4 Spieler. Die Spieler möchten von (1) u nach w, (2) w nach v, (3) v nach w und (4) u nach v. Im Prinzip hat jeder Spieler nur eine direkte (direkte Kante) und eine indirekte (über dritten Knoten) Strategie:



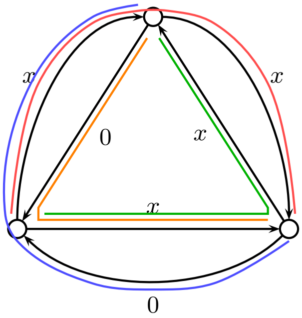
Auslastungsspiele mit linearen Verzögerungsfunktionen

Optimum s^*



$cost(s^*) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Ein schlechtes NG s



$cost(s) = 3 + 2 + 2 + 3 = 10$

Der PoA in in diesem Spiel ist mindestens 2.5. Geht es noch schlechter?

Auslastungsspiele mit linearen Verzögerungsfunktionen

Wir zeigen, dass der PoA in diesen Spielen höchstens 2.5 ist:

Sei s das schlechteste reine Nash-Gleichgewicht. Wenn Spieler i in s zu einer anderen Strategie abweicht, werden seine Kosten nicht kleiner. Sei s^* ein optimaler Zustand. Es gilt insbesondere, dass $c_i(s) \leq c_i(s_i^*, s_{-i})$.

Damit können wir die sozialen Kosten beschränken durch

$$cost(s) \quad = \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(s) \quad \leq \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(s_i^*, s_{-i}) \quad . \qquad (1)$$

Dies ist eine verschränkte Summe – jeder Spieler betrachtet die Kosten wenn er alleine zur Strategie in s^* abweichen würde. Wie können wir diesen Term auf $cost(s)$ und $cost(s^*)$ zurückführen?

Auslastungsspiele mit linearen Verzögerungsfunktionen

Betrachten wir den Term genauer für die Auslastungsspiele. Wir schreiben $n_r = n_r(s)$ für die Last von Ressource r in Zustand s und $n_r^* = n_r(s^*)$ für s^*.

Wenn Spieler i nach s_i^* abweicht, dann sieht er auf jeder Ressource $r \in s_i^*$ eine Last von höchstens $n_r + 1$ (evtl. nur n_r wenn $r \in s_i \cap s_i^*$)

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(s_i^*, s_{-i}) \leq \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{r \in s_i^*} d_r(n_r + 1) \ .$$

Da genau n_r^* Spieler auf Ressource r abweichen, gilt:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{r \in s_i^*} d_r(n_r + 1) = \sum_{r \in \mathcal{R}} n_r^* d_r(n_r + 1) = \sum_{r \in \mathcal{R}} n_r^* a_r \cdot (n_r + 1) \ .$$

Wir nutzen nun folgendes Lemma ohne Beweis:

Lemma (Christodoulou, Koutsoupias, 2005)

Für alle nicht-negativen ganzen Zahlen $y, z \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ gilt

$$y(z+1) \leq \frac{5}{3} \cdot y^2 + \frac{1}{3} \cdot z^2 \ .$$

Auslastungsspiele mit linearen Verzögerungsfunktionen

Mit $y = n_r^*$ und $z = n_r + 1$ gilt also:

$$\begin{aligned}\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(s_i^*, s_{-i}) &\leq \sum_{r \in \mathcal{R}} a_r n_r^* (n_r + 1)\\ &\leq \sum_{r \in \mathcal{R}} a_r \left(\frac{5}{3} (n_r^*)^2 + \frac{1}{3} n_r^2 \right)\\ &= \frac{5}{3} \sum_{r \in \mathcal{R}} n_r^* (a_r n_r^*) + \frac{1}{3} \sum_{r \in \mathcal{R}} n_r (a_r n_r)\\ &= \frac{5}{3} cost(s^*) + \frac{1}{3} cost(s)\end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(s_i^*, s_{-i}) \leq \frac{5}{3} \cdot cost(s^*) + \frac{1}{3} \cdot cost(s) \tag{2}$$

Auslastungsspiele mit linearen Verzögerungsfunktionen

Damit können wir nun den Preis der Anarchie wir folgt beschränken:

$$\begin{aligned} cost(s) &\leq \frac{5}{3} \cdot cost(s^*) + \frac{1}{3} \cdot cost(s) \\ \Rightarrow PoA = \frac{cost(s)}{cost(s^*)} &\leq \frac{5/3}{1-1/3} = 2.5 \end{aligned} \tag{3}$$

Aus diesem Beweis leiten wir ein Schema ab:

1. Stelle Ungleichung (1) auf. Sie beruht nur auf der Annahme an $cost(s)$ und darauf, dass s ein reines NG ist.
2. Leite Ungleichung (2) mit Zahlen (λ, μ) her. Die Zahlen $(5/3, 1/3)$ waren hier spezifisch für das Spiel.
3. Schließe die Rechnung durch Ungleichung (3) ab. Die Schranke auf den PoA beruht nur auf den Zahlen in Ungleichung (2).

Smoothness

Die einzige Information über das Spiel sind die Zahlen in (2). Wenn für ein Spiel also eine Ungleichung dieser Form gilt, dann können wir eine Schranke auf den PoA für reine NG mit dem Schema finden.

Definition

Ein Spiel heißt (λ, μ)-smooth für $\lambda > 0$ und $\mu \leq 1$ wenn für jedes Paar von Zuständen s, s' gilt

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(s'_i, s_{-i}) \leq \lambda \cdot cost(s') + \mu \cdot cost(s) \tag{4}$$

Daraus folgt mit dem Schema dann direkt:

Satz

Wenn ein Spiel (λ, μ)-smooth ist, dann ist der Preis der Anarchie für reine Nash-Gleichgewichte höchstens

$$\frac{\lambda}{1-\mu} \ .$$

Beispiel: Wardropspiele

Unser Beweis für den PoA in Wardropspielen nutzte auch das Schema.

Im ersten Schritt

$$C(f) \quad = \quad \sum_{e \in E} f_e d_e(f_e) \quad \leq \quad \sum_e g_e d_e(f_e)$$

stellen wir quasi (1) auf. Der Term rechts ist im Prinzip eine "verschränkte Summe", wenn im Gleichgewicht f jeder infinitesimal kleine Spieler einzeln zur Strategie im Optimalfluss g abweicht.

Mit dem Lemma und dem Bild-Beweis ergibt sich für jedes Paar f, g von Flüssen

$$\sum_e g_e d_e(f_e) \quad \leq \sum_{e \in E} g_e d_e(f_e) + \frac{1}{4} \sum_{e \in E} f_e d_e(f_e) = \quad 1 \cdot C(g) + \frac{1}{4} \cdot C(f) \quad .$$

Also: Wardropspiele mit affinen Verzögerungen sind $(1, 1/4)$-smooth.

Eine Herleitung wie in (3) liefert $C(f)/C(g) \leq 1/(1 - 1/4) = 4/3$.

Allgemeinere Gleichgewichte?

Viele Spiele haben keine reinen Nash-Gleichgewichte. Was ist der Preis der Anarchie für allgemeinere Gleichgewichte?

Wie hoch sind die sozialen Kosten wenn jeder Spieler mit einem No-Regret-Algorithmus spielt?

Definition

Der Preis der Anarchie für grob-korrelierte Gleichgewichte oder Preis der totalen Anarchie ist die kleinste Zahl $\rho \geq 1$ so dass für jedes grob-korrelierte Gleichgewicht $\mathcal{V}$ und für jeden Zustand s' des Spiels gilt

$$\mathbb{E}_{s \sim \mathcal{V}}[cost(s)] \quad \leq \quad \rho \cdot cost(s') \ .$$

Smoothness kann noch mehr!

Im Schema oben haben wir nur benutzt, dass (2) für ein *reines NG* s *und ein Optimum* s^* *gilt*. In der Definition fordern wir allerdings, dass (4) für *jedes Paar von Zuständen* gilt. Diese stärkere Forderung erlaubt folgendes Resultat:

Satz

Wenn ein Spiel (λ, μ)*-smooth ist, dann ist der PoA für grob-korrelierte Gleichgewichte höchstens*

$$\frac{\lambda}{1-\mu} .$$

Beweis:

Sei s^* ein optimaler Zustand. Wir erhalten Schritt (1) wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}[cost(s)] &= \mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}\left[\sum_{i\in\mathcal{N}} c_i(s)\right] = \sum_{i\in\mathcal{N}} \mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}[c_i(s)] \\ &\le \sum_{i\in\mathcal{N}} \mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}[c_i(s_i^*, s_{-i})] = \mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}\left[\sum_{i\in\mathcal{N}} c_i(s_i^*, s_{-i})\right] \end{aligned}$$

Preis der Anarchie für grob-korrelierte Gleichgewichte

Nun nutzen wir die Smoothness-Eigenschaft punktweise für alle möglichen Zustände unter der Verteilung $\mathcal{V}$ und s^*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}\left[\sum_{i\in\mathcal{N}} c_i(s_i^*, s_{-i})\right] &\leq \mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}\left[\lambda \cdot cost(s^*) + \mu \cdot cost(s)\right] \\ &\leq \lambda \cdot cost(s^*) + \mu \cdot \mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}[cost(s)] \end{aligned}$$

Dies entspricht Schritt (2).

Die verbleibende Herleitung ist nun exakt wie in (3):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}[cost(s)] &\leq \lambda cost(s^*) + \mu \cdot \mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}[cost(s)] \\ \Rightarrow \quad \frac{\mathbb{E}_{s\sim\mathcal{V}}[cost(s)]}{cost(s^*)} &\leq \frac{\lambda}{1-\mu} \end{aligned}$$

$\square$

Smoothness Beispiele

Satz

Jedes Wardropspiel mit affinen Verzögerungsfunktionen ist $\left(1, \frac{1}{4}\right)$*-smooth. Damit ist der PoA für grob-korrelierte Gleichgewichte höchstens 4/3.*

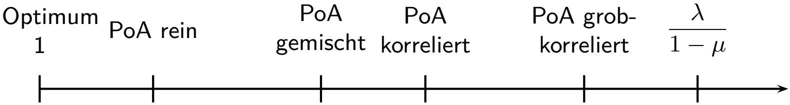
Satz

Jedes Auslastungsspiel mit linearen Verzögerungsfunktionen ist $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$*-smooth. Damit ist der PoA für grob-korrelierte Gleichgewichte höchstens 2.5.*

In beiden Fällen gelten die oberen Schranken für grob-korrelierte Gleichgewichte. Daneben gibt es Instanzen, in denen die Schranke schon für reine Gleichgewichte angenommen wird. Wir nennen Klassen von Spielen mit dieser Eigenschaft dicht (engl.: tight).

Hierarchie im Preis der Anarchie

Smoothness ergibt eine PoA-Schranke für viele Gleichgewichte. Jedes reine NG ist ein gemischtes NG, jedes gemischte NG ein korreliertes Ggw und jedes korrelierte ein grob-korreliertes Ggw. Je allgemeiner das Konzept, desto größer der Preis der Anarchie (da worst-case). Die Schranke $\lambda/(1-\mu)$ mit Smoothness kann man noch allgemeiner anwenden als nur auf grob-korrelierte Gleichgewichte:



Hierarchie im Preis der Anarchie

Für dichte Klassen von Spielen gibt es ein reines Nash-Gleichgewicht, das einen PoA von $\lambda/(1-\mu)$ liefert. Damit kollabiert die Hierarchie:

Dichte in Auslastungsspielen

Satz (Roughgarden, 2003, Informell)

Für eine große Klasse von nicht-fallenden, nicht-negativen Verzögerungsfunktionen ist der PoA für reine Nash-Gleichgewichte in Wardropspielen $\lambda/(1-\mu)$*. Diese Schranke wird erreicht in Netzwerken mit zwei Knoten und zwei Links (wie im Pigou-Beispiel).*

Satz (Roughgarden, 2009, Informell)

Für eine große Klasse von nicht-fallenden, nicht-negativen Verzögerungsfunktionen ist der PoA für reine Nash-Gleichgewichte in Auslastungsspielen $\lambda/(1-\mu)$*. Diese Schranke wird erreicht in Netzwerken bestehend aus zwei Kreisen und evtl. vielen Knoten (wie im Beispiel für lineare Funktionen oben).*

Viele Klassen von Wardrop und Auslastungsspielen sind also dicht und erlauben universelle Worst-Case-Strukturen der Netzwerke.

Auslastungspiele

Smoothness

Intuition und Grenzen

Preis der Stabilität

Grenzen von Smoothness

Smoothness gibt sehr gute Schranken wenn gute soziale Kosten im Spiel nicht zu stark von koordiniertem Verhalten der Spieler abhängig sind.

Betrachte dagegen folgendes Spiel, in dem niedrige soziale Kosten stark von der Koordination der Spielerstrategien abhängen:

	A	B
A	1 1	100 100
B	100 100	1 1

Grenzen von Smoothness

	A	B
A	1 1	100 100
B	100 100	1 1

- Optimale Zustände sind reine NG mit sozialen Kosten 2.
- PoA für reine NG ist 1.
- Schlechtestes gemischtes NG ist $x_1 = x_2 = (0.5, 0.5)$.
- Erwartete soziale Kosten 101. PoA für gemischte NG ist 50.5

Grenzen von Smoothness

	A	B
A	1 / 1	100 / 100
B	100 / 100	1 / 1

- Jedes grob-korrelierte Gleichgewicht $\mathcal{V}$ ist ein korreliertes Gleichgewicht.
- Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$\begin{aligned} & \max(\Pr[s = (A,B)], \Pr[s = (B,A)]) \\ \leq \quad & \min(\Pr[s = (A,A)], \Pr[s = (B,B)]) \end{aligned}$$

- Schlechtestes grob-korreliertes ist Gleichverteilung (also wieder das schlechteste gemischte NG).
- PoA für korrelierte und grob-korrelierte Gleichgewichte ist 50.5

Grenzen von Smoothness

	A		B	
A	1	1	100	100
B	100	100	1	1

Für eine Schranke auf λ und μ betrachte nun das reine NG $s = (A, A)$ und ein Optimum $s^* = (B, B)$:

$$200 = c_1(B, A) + c_2(A, B) = \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(s_i^*, s_{-i}) \leq \lambda \cdot cost(s^*) + \mu \cdot cost(s) = 2\lambda + 2\mu$$

Dann ist $\lambda \geq 100 - \mu$ und $PoA \leq (100 - \mu)(1 - \mu) = 1 + 99/(1 - \mu)$. Mit $\mu = 0$ ergibt sich als 100 als kleinste obere Schranke.

Grenzen von Smoothness

	A	B
A	1, 1	100, 100
B	100, 100	1, 1

Selbst wenn wir nur die Smoothness-Bedingung bzgl. reiner NG und optimaler Zustände betrachten, bekommen wir eine Schranke von 100 auf den PoA.

Das ist 100 Mal größer als der echte PoA für reine NG.

Es ist auch fast $|\mathcal{N}|$ Mal größer als der PoA für grob-korrelierte Gleichgewichte.

In diesem Spiel braucht es Koordination für Gleichgewichte und niedrige Kosten. In $\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(s_i^*, s_{-i})$ treten dagegen nur Zustände auf mit Kosten, die extrem viel höher sind als im Gleichgewicht oder im Optimum. Dadurch muss λ extrem erhöht werden und die resultierende Schranke verliert ihre Aussagekraft.

Fallende Latenzen: Fair-Sharing-Spiele

Fair-Sharing-Spiel

- Menge $\mathcal{N}$ von n Spielern, Menge $\mathcal{R}$ von m Ressourcen
- Spieler i wählt Teilmenge der Resourcen, d.h. Strategiemenge $\Sigma_i \subseteq 2^{\mathcal{R}}$
- Ressource $r \in \mathcal{R}$ hat feste Kosten $c_r \geq 0$.
- Kosten c_r werden zu gleichen Teilen den Spielern zugewiesen, die r nutzen.

Fair-Sharing-Spiele sind Auslastungsspiele mit Latenzen $d_r(x) = c_r/x$.

Soziale Kosten ergeben sich als Summe der Kosten der von mind. einem Spieler benutzten Ressourcen:

$$cost(s) = \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(s) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{r \in s_i} d_r(n_r) = \sum_{\substack{r \in \mathcal{R} \\ n_r \geq 1}} n_r \cdot c_r / n_r = \sum_{\substack{r \in \mathcal{R} \\ n_r \geq 1}} c_r \quad .$$

Preis der Stabilität

Satz

Jedes Fair-Sharing-Spiel ist $(n, 0)$-smooth, der PoA für grob-korrelierte Gleichgewichte also höchstens n. Die Klasse der Fair-Sharing-Spiele ist dicht, d.h. es gibt Spiele in denen der Preis der Anarchie für reine Gleichgewichte genau n ist.

Der PoA ist hoch, aber reine NG sind nicht unbedingt eindeutig. Was kosten die anderen NGs, wieviel kostet das beste NG?

Preis der Stabilität für reine NG:

- Betrachte Σ^{RNG} als die Menge der reinen NG des Spiels Γ
- Preis der Stabilität ist das Verhältnis:

$$PoS = \frac{\min_{s' \in \Sigma^{RNG}} cost(s')}{cost(s^*)}$$

PoS quantifiziert die Verschlechterung des billigsten NG im Vergleich zum optimalen Zustand des Spiels.

Preis der Stabilität in Fair-Sharing-Spielen

Satz

Der PoS für reine Nash-Gleichgewichte in Fair-Sharing-Spielen ist höchstens $\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = O(\log n)$.

Beweis:

Rosenthals Potential im Fair-Sharing-Spiel ist

$$\begin{aligned}\Phi(s) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{i=1}^{n_r} c_r / i \quad &= \quad \sum_{\substack{r \in \mathcal{R} \\ n_r \geq 1}} c_r \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n_r}\right) \\ &\leq \quad \sum_{\substack{r \in \mathcal{R} \\ n_r \geq 1}} c_r \cdot \mathcal{H}_n \\ &= \quad cost(s) \cdot \mathcal{H}_n \quad .\end{aligned}$$

Preis der Stabilität in Fair-Sharing-Spielen

In $\Phi(s)$ verrechnen wir für jeden Spieler, der Ressource r wählt, einen Beitrag von c_r/i für ein $i = 1, \ldots, n_r$. In seinen Kosten $c_i(s)$ verrechnen wir nur c_r/n_r. Also gilt für jeden Zustand s im Spiel:

$$cost(s) \leq \Phi(s) \leq cost(s) \cdot \mathcal{H}_n \quad .$$

Wir betrachten nun eine Verbesserungsfolge, die im optimalen Zustand s^* beginnt. Die Folge endet in einem reinen Nash-Gleichgewicht. Jeder Schritt verringert das Potenzial. Das resultierende Nash-Gleichgewicht s erfüllt daher $\Phi(s) \leq \Phi(s^*)$. Also:

$$cost(s) \leq \Phi(s) \leq \Phi(s^*) \leq cost(s^*) \cdot \mathcal{H}_n \quad .$$

Es gibt also ein reines Nash-Gleichgewicht, in dem die sozialen Kosten höchstens um einen Faktor $\mathcal{H}_n$ größer sind als im Optimum s^*. □

Literatur

- Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani. Algorithmic Game Theory, 2007. (Kapitel 18 und 19.3).
- Awerbuch, Azar, Epstein. The Price of Routing Unsplittable Flow. SIAM Journal on Computing 42(1):160–177, 2013.
- Christodoulou, Koutsoupias. The Price of Anarchy of Finite Congestion Games. STOC 2005.
- Blum, Hajiaghayi, Ligett, Roth. Regret Minimization and the Price of Total Anarchy. STOC 2008.
- Roughgarden. Intrinsic Robustness of the Price of Anarchy. Journal of the ACM 62(5):32:1–32:42, 2015.
- Roughgarden. Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory, 2016. (Kapitel 14)