

Reine Nash-Gleichgewichte

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2018

Auslastungsspiele

Konvergenzzeit in Auslastungsspielen

Komplexität von reinen Nash-Gleichgewichten

Ordinale Potenziale und Schwache Kreisfreiheit

Auslastungsspiele (Congestion Games)

Ein **Auslastungsspiel** ist ein Tupel $\Gamma = (\mathcal{N}, \mathcal{R}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{N}}, (d_r)_{r \in \mathcal{R}})$ mit

- ▶ $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, Menge der Spieler,
- ▶ $\mathcal{R} = \{1, \dots, m\}$, Menge der Ressourcen
- ▶ $\Sigma_i \subseteq 2^{\mathcal{R}}$, Strategieraum von Spieler i
- ▶ $d_r : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}$, Latenz- oder Verzögerungsfunktion von Ressource r

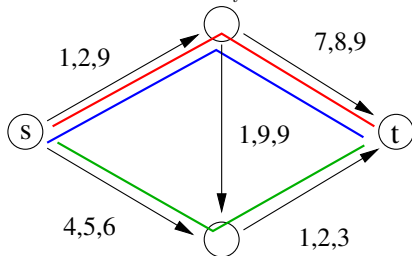
Für jeden Zustand $S = (S_1, \dots, S_n) \in \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$ sei

- ▶ $n_r =$ Anzahl der Spieler mit $r \in S_i$
- ▶ $d_r(n_r) =$ Latenz oder Verzögerung der Ressource r
- ▶ $\delta_i(S) = \sum_{r \in S_i} d_r(n_r) =$ Latenz oder Verzögerung von Spieler i

Die *Kosten* von Spieler i in Zustand S sind $c_i(S) = \delta_i(S)$. Spieler wollen ihre Kosten verringern.

Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel (Network Congestion Game)

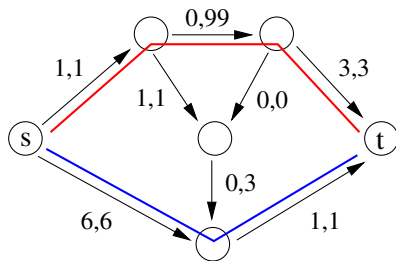
- ▶ Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, Jede Kante $e \in E$ hat eine Latenzfunktion $d_e : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}$.
- ▶ Spieler i möchte einen Weg wählen mit kleinster Latenz zwischen seinem Startknoten s_i und dem Endknoten t_i .



- ▶ In diesem Beispiel ist $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R} = E$, $\Sigma_i =$ Menge der s-t-Wege.
- ▶ Dieses Spiel ist **symmetrisch**: Alle Spieler haben die gleiche Strategiemenge, und wenn wir in einem Zustand die Strategien der Spieler permutieren, dann ergeben sich die Kosten in ebenso permutierter Weise.

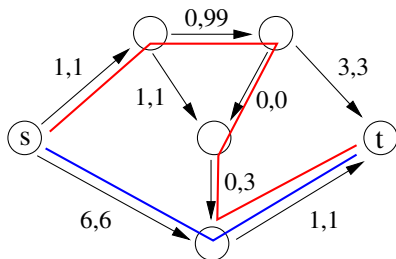
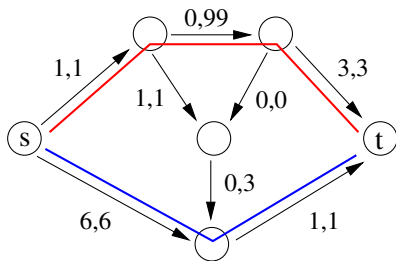
Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

Eine Folge von (beste-Antwort) Verbesserungsschritten: Erster Schritt ...



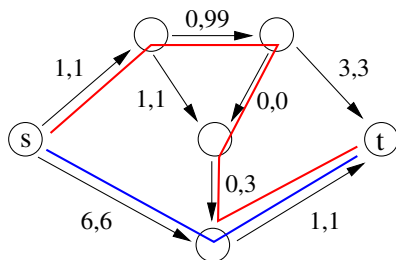
Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

Eine Folge von (beste-Antwort) Verbesserungsschritten: Erster Schritt ...



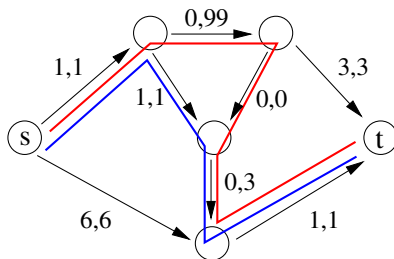
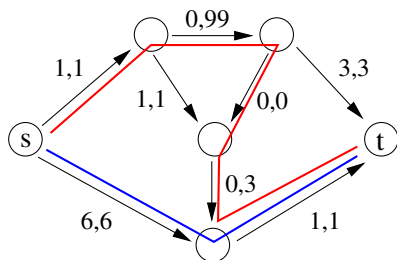
Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

... zweiter Schritt ...



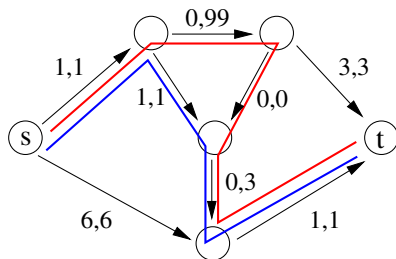
Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

... zweiter Schritt ...



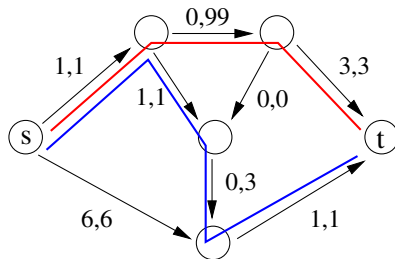
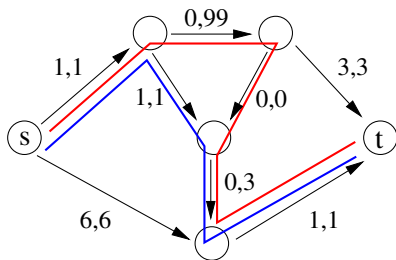
Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

... dritter Schritt ...



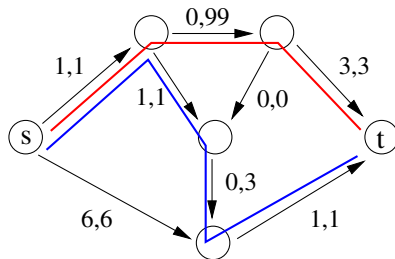
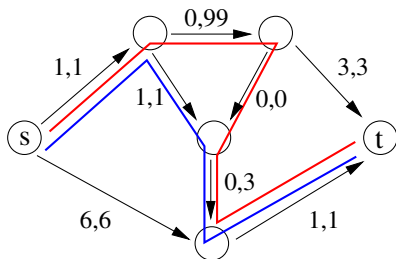
Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

... dritter Schritt ...



Beispiel: Netzwerkauslastungsspiel

... dritter Schritt ...



Reines Nash-Gleichgewicht – **Stopp!**

Fragen

- ▶ Gibt es in jedem Auslastungsspiel ein reines Nash-Gleichgewicht?
- ▶ Ist jede Folge von Verbesserungsschritten endlich?
- ▶ Wieviele Schritte werden benötigt, um ein (reines) Nash-Gleichgewicht zu erreichen?

Endliche Verbesserungseigenschaft

Satz (Rosenthal 1973)

In einem Auslastungsspiel ist jede Folge von Verbesserungsschritten endlich.

Aus diesem Resultat folgt unmittelbar

Korollar

Jedes Auslastungsspiel hat ein reines Nash-Gleichgewicht.

Rosenthals Analyse basiert auf einer Potenzialfunktion.

Für jeden Zustand S sei

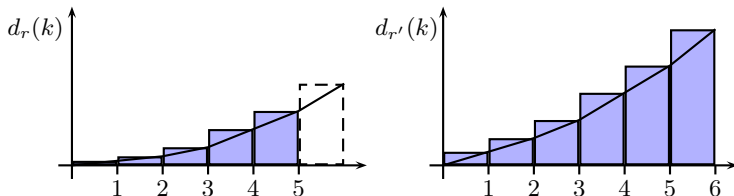
$$\Phi(S) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{k=1}^{n_r(S)} d_r(k) .$$

Diese Funktion heißt **Rosenthals Potenzialfunktion**.

Satz von Rosenthal: Beweis

Lemma

Sei S ein beliebiger Zustand. Wenn wir von S zu Zustand S' wechseln mit einem Verbesserungsschritt von Spieler i , in dem seine Kosten um $\Delta > 0$ verringert werden, dann gilt $\Phi(S') = \Phi(S) - \Delta$.

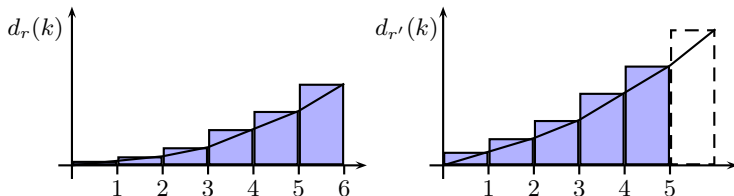


Im Bild ist der Wert der Potenzialfunktion die blaue Fläche. Wenn ein Spieler von r' zu r wechselt, verändern sich seine Kosten genau wie der Wert der Potenzialfunktion.

Satz von Rosenthal: Beweis

Lemma

Sei S ein beliebiger Zustand. Wenn wir von S zu Zustand S' wechseln mit einem Verbesserungsschritt von Spieler i , in dem seine Kosten um $\Delta > 0$ verringert werden, dann gilt $\Phi(S') = \Phi(S) - \Delta$.



Im Bild ist der Wert der Potenzialfunktion die blaue Fläche. Wenn ein Spieler von r' zu r wechselt, verändern sich seine Kosten genau wie der Wert der Potenzialfunktion.

Satz von Rosenthal: Beweis

Lemma

Sei S ein beliebiger Zustand. Wenn wir von S zu Zustand S' wechseln mit einem Verbesserungsschritt von Spieler i , in dem seine Kosten um $\Delta > 0$ verringert werden, dann gilt $\Phi(S') = \Phi(S) - \Delta$.

Beweis:

- ▶ Das Potenzial $\Phi(S)$ kann berechnet werden, in dem Spieler nacheinander in beliebiger Ordnung in das Spiel eingefügt und die Latenzen zum Zeitpunkt des Einfügens summiert werden.
- ▶ O.B.d.A. sei Spieler i der letzte Spieler, den wir einfügen wenn wir $\Phi(S)$ berechnen. Für diesen Spieler addieren wir seine tatsächlichen Kosten in Zustand S zu $\Phi(S)$.
- ▶ Wenn wir uns von S zu S' bewegen, dann sinken die Kosten von i um Δ . Folglich sinkt das Potenzial Φ auch genau um Δ . □ (Lemma)

Satz von Rosenthal: Beweis

Das Lemma zeigt, dass Φ ein **exaktes Potenzial** ist, d.h. wenn ein einzelner Spieler seine Latenz um einen Wert $\Delta > 0$ verringert, dann sinkt Φ um genau den gleichen Wert Δ .

Daneben stellen wir fest:

- i) Die Latenzwerte sind ganze Zahlen. Bei jeder Verbesserung gilt $\Delta \geq 1$.
- ii) Für jeden Zustand S gilt $\Phi(S) \leq \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{i=1}^n |d_r(i)|$.
- iii) Für jeden Zustand S gilt $\Phi(S) \geq -\sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{i=1}^n |d_r(i)|$.

Daraus folgt, dass die Anzahl Verbesserungsschritte höchstens $2 \cdot \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{i=1}^n |d_r(i)|$ beträgt und endlich ist. □ (Theorem)

Potenzialspiele

Definition (Exaktes Potenzialziel)

Ein strategisches Spiel $\Gamma = (\mathcal{N}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{N}}, (c_i)_{i \in \mathcal{N}})$ besitzt eine **exakte Potenzialfunktion** $\Phi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, wenn für jedes $i \in \mathcal{N}$, für jedes $S_{-i} \in \Sigma_{-i}$, und für jede $S_i, S'_i \in \Sigma_i$ gilt:

$$c_i(S_i, S_{-i}) - c_i(S'_i, S_{-i}) = \Phi(S_i, S_{-i}) - \Phi(S'_i, S_{-i}) .$$

Ein solches Spiel nennen wir **(exaktes) Potenzialspiel**.

Beobachtung:

Sei Γ ein exaktes Potenzialspiel. Dann hat Γ die **endliche Verbesserungseigenschaft** (Engl: **finite improvement property**), und daher existiert ein reines Nash-Gleichgewicht.

Auslastungs- und Potenzialspele

Rosenthals Potenzialfunktion ist eine exakte Potenzialfunktion. Daher gilt:

Corollary

Jedes Auslastungsspiel ist ein exaktes Potenzialspiel.

In gewisser Weise gilt auch die andere Richtung:

Satz (Monderer, Shapley, 1996)

Jedes exakte Potenzialspiel ist "isomorph" zu einem Auslastungsspiel.

Für jedes exakte Potenzialspiel gibt es ein anderes Spiel mit den gleichen Spielern, Strategien und Kosten. Das andere Spiel basiert auf geschickt zusammengestellten Ressourcen und Latenzen, so dass die Strategien als Teilmengen von Ressourcen interpretiert werden können und die Kosten sich als Summe über deren Latenzen ergeben. In diesem Sinne gibt es für jedes exakte Potenzialspiel eine Representation als "isomorphes" Auslastungsspiel.

Auslastungsspiele

Konvergenzzeit in Auslastungsspielen

Komplexität von reinen Nash-Gleichgewichten

Ordinale Potenziale und Schwache Kreisfreiheit

Die zentrale Frage in diesem Kapitel

Wie viele Verbesserungsschritte werden benötigt, um ein reines Nash-Gleichgewicht zu erreichen?

Übergangsgraph

- ▶ Der **Übergangsgraph** eines Auslastungsspiels Γ enthält einen Knoten für jeden Zustand S und eine gerichtete Kante (S, S') wenn S' von S mit einem Verbesserungsschritt eines einzelnen Spielers erreicht werden kann.
- ▶ Der **Beste-Antwort-Übergangsgraph** enthält nur Kanten für Verbesserungsschritte, die besten Antworten entsprechen.

Eine Folge von Verbesserungsschritten (bzw. besten Antworten) entspricht einem Weg im Übergangsgraphen (bzw. Beste-Antwort-Übergangsgraphen).

Die Senken dieses Graphen sind die Nash-Gleichgewichte von Γ .

Die Anzahl der Knoten (Zustände) kann bis zu 2^{mn} betragen. Daher kann es Wege mit exponentieller Länge geben.

Singleton-Auslastungsspiele

Definition (Singleton-Auslastungsspiel)

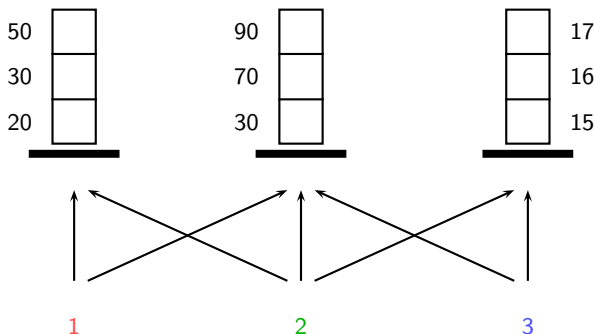
Ein Auslastungsspiel heißt **singleton** wenn für jeden Spieler $i \in \mathcal{N}$ und jede Strategie $R \in \Sigma_i$ gilt $|R| = 1$.

In Worten: Jeder Spieler möchte nur eine Ressource aus einer für ihn zulässigen Teilmenge von Ressourcen auswählen.

Obwohl dies eine relativ starke Einschränkung des Strategieraumes ist, gibt es immer noch bis zu m^n unterschiedliche Zustände in einem Spiel dieser Art.

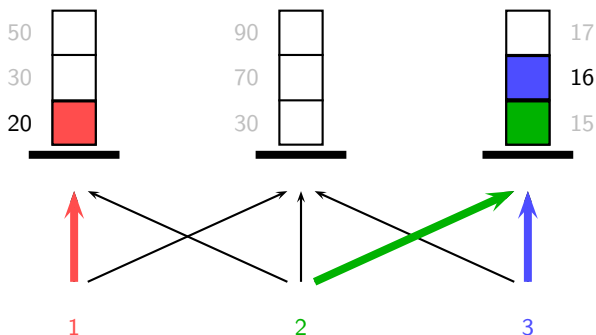
Singleton-Auslastungsspiele – Beispiel

Betrachte eine "Server-Farm" mit drei Servern a , b , c (Ressourcen) und drei Spielern 1,2,3. Jeder der Spieler möchte einen Task auf genau einem Server berechnen lassen und wählt ihn strategisch nach der resultierenden Bearbeitungszeit.



Singleton-Auslastungsspiele – Beispiel

Betrachte eine "Server-Farm" mit drei Servern a , b , c (Ressourcen) und drei Spielern 1,2,3. Jeder der Spieler möchte einen Task auf genau einem Server berechnen lassen und wählt ihn strategisch nach der resultierenden Bearbeitungszeit.



Nash-Gleichgewicht

Singleton-Auslastungsspiele – Konvergenz

Satz

In Singleton-Auslastungsspielen hat jede Verbesserungsfolge eine Länge von $O(n^2m)$.

Beweisidee:

- ▶ Ersetze Latenzwerte durch beschränkte, positive ganze Zahlen ohne die Präferenzen der Spieler zu verändern.
- ▶ Damit ergibt sich eine obere Schranke auf den Maximalwert des Potenzials.
- ▶ Durch ganzzahlige Latenzen sinkt das Potenzial im Verbesserungsschritt um mind. 1. Daher ist die Länge jeder Verbesserungsfolge beschränkt durch maximalen Potenzialwert.

Singleton-Spiele: Beweis

Sortiere die Menge der Latenzwerte $\{d_r(k) \mid r \in \mathcal{R}, 1 \leq k \leq n\}$ in nicht-fallender Reihenfolge. Wir definieren alternative, neue Latenzfunktionen:

$$\bar{d}_r(k) := \text{Position von } d_r(k) \text{ in Sortierung.}$$

Beispiel:

Die sortierte Menge von Latenzen aus dem obigen Beispiel ist

$$15, 16, 17, 20, 30, 50, 70, 90.$$

Daher ergeben sich die alten und neuen Latenzfunktionen als

$$d_a(1, 2, 3) = (20, 30, 50) \quad \bar{d}_a(1, 2, 3) = (4, 5, 6)$$

$$d_b(1, 2, 3) = (30, 70, 90) \quad \bar{d}_b(1, 2, 3) = (5, 7, 8)$$

$$d_c(1, 2, 3) = (15, 16, 17) \quad \bar{d}_c(1, 2, 3) = (1, 2, 3)$$

Die neue Latenz von Spieler i auf Ressource r in Zustand S ist

$$\bar{\delta}_i(S) = \bar{d}_r(n_r(S)).$$

Singleton-Spiele: Beweis

Beobachtung:

Seien S und S' zwei Zustände, so dass (S, S') einen Verbesserungsschritt darstellt für einen Spieler i mit originalen Latenzen. Dann ist (S, S') auch ein Verbesserungsschritt für i mit neuen Latenzen.

Rosenthals Potenzialfunktion mit neuen Latenzen ist beschränkt durch:

$$\bar{\Phi}(S) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{k=1}^{n_r(S)} \bar{d}_r(k) \leq \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{k=1}^{n_r(S)} n m \leq n^2 m .$$

Es gilt $\bar{\Phi} \geq 1$. Daneben fällt $\bar{\Phi}$ um mind. 1 in jedem Schritt. Daher beträgt die Länge jeder Verbesserungsfolge höchstens $n^2 m$. □ (Satz)

Schnelle Konvergenz zum reinen Gleichgewicht?

Für Singleton-Spiele konnten wir zeigen, dass **jede Verbesserungsfolge** eine **Länge polynomiell in n und m** hat. Diese Schranke gilt für jede beliebige Verbesserungsfolge, bei denen der wechselnde Spieler mit seiner neuen Strategie seine Kosten strikt verringert (nicht nur beste Antworten).

Dieses Resultat läßt sich noch verallgemeinern auf sog. **Matroidspiele**. Hier besteht die Strategiemenge jedes Spielers aus den Basen eines Matroids über die Ressourcen. In solchen Spielen kann man für **Folgen von besten Antworten** zeigen, dass sie eine **Länge polynomiell in n und m** haben.

Im Allgemeinen gibt es aber für jedes $n \in \mathbb{N}$ mindestens ein Spiel mit

- ▶ $O(n)$ Spielern und $O(n)$ Ressourcen,
- ▶ nicht-negativen und monotonen Latenzfunktionen, und
- ▶ einem ausgewiesenen Startzustand S ,

so dass **jede Verbesserungsfolge** von S zu einem reinen Nash-Gleichgewicht eine **Länge exponentiell in n** hat.

Approximative Gleichgewichte

Wie verhält sich die Konvergenzzeit, wenn die Spieler auch mit einer Strategie zufrieden sind, die *fast* so gut ist wie die beste Antwort?

Approximative Gleichgewichte

Wir nutzen $0 \leq \varepsilon < 1$ für eine “Fehlertoleranz” der Spieler.

Definition

Eine beste Antwort s'_i heißt eine **ε -Verbesserung** für Spieler i im Zustand s , wenn $c_i(s) - c(s'_i, s_{-i}) > \varepsilon \cdot c_i(s)$. Das Paar $(s, (s'_i, s_{-i}))$ heißt **ε -Verbesserungsschritt**.

Definition

Ein Zustand s heißt **(reines) ε -approximatives Nash-Gleichgewicht**, wenn kein Spieler $i \in \mathcal{N}$ eine ε -Verbesserung hat.

Eine ε -Verbesserung für Spieler i im Zustand s verringert die Kosten um mehr als einen ε -Bruchteil seiner momentanen Kosten. Im ε -approximativen Gleichgewicht s kann kein Spieler i seine Kosten $c_i(s)$ um mehr als $\varepsilon \cdot c_i(s)$ reduzieren, wenn er alleine zu einer anderen Strategie abweicht.

Konvergenz zum approximativen Gleichgewicht

Wir betrachten Folgen von ε -Verbesserungsschritten in einer großen Klasse von Spielen mit einer natürlichen Bedingung auf die Kostenfunktionen.

Definition

Ein Auslastungsspiel heißt **symmetrisch** wenn $\Sigma_i = \Sigma_j$ für alle Spieler $i, j \in \mathcal{N}$.

Definition

Sei $\alpha \geq 1$ und d_r eine positive, monoton steigende Latenzfunktion. d_r ist **α -sprungbeschränkt**, wenn für alle $k \geq 2$ gilt

$$d_r(k) \leq \alpha \cdot d_r(k-1) .$$

Durch Hinzufügen eines weiteren Spielers auf Ressource r erhöhen sich die Kosten aller Spieler auf r nur um den Faktor α . Damit gilt insbesondere $d_r(k) \leq d_r(1) \cdot \alpha^{k-1}$.

Konvergenz zum approximativen Gleichgewicht

Wir bezeichnen mit $\Phi^* = \min_{S \in \Sigma} \Phi(S)$ den kleinsten Wert von Rosenthals Potenzialfunktion für einen Zustand im Spiel. Für positive Latenzfunktionen in natürlichen Zahlen gilt offensichtlich $\Phi^* \geq n$.

Satz (Chien, Sinclair, 2011)

Sei Γ ein symmetrisches Auslastungsspiel mit α -sprungbeschränkten Latenzfunktionen in \mathbb{N} . Für jeden Zustand S gibt es eine Folge von ε -Verbesserungsschritten mit der Länge

$$O\left(\frac{n\alpha}{\varepsilon} \cdot \log\left(\frac{\Phi(S)}{\Phi^*}\right)\right) = O\left(\frac{n\alpha}{\varepsilon} \cdot \log\left(m \cdot \max_{r \in \mathcal{R}} d_r(n)\right)\right),$$

die in einem ε -approximativen Nash-Gleichgewicht endet.

Konvergenz zum approximativen Gleichgewicht

Beweis:

Wir konstruieren die Folge mit einer **relativen ε -Nash-Dynamik**:

Sei $I(S)$ die Menge der Spieler mit ε -Verbesserungen in S , und sei S'_i eine ε -Verbesserung für $i \in I(S)$. Der abweichende Spieler $i^* \in I(S)$ wird gewählt als ein Spieler mit maximaler relativer Kostenverbesserung:

$$i^* \in \arg \max_{i \in I(S)} \frac{c_i(S) - c_i(S'_i, S_{-i})}{c_i(S)} .$$

Betrachte nun einen beliebigen anderen Spieler $j \neq i^*$ im Zustand S :

- ▶ j hätte auch zu S'_{i^*} abweichen können (Spiel symmetrisch)
- ▶ Wenn j anstelle von i^* nach S'_{i^*} abweicht, wären seine Kosten höchstens:

$$c_j(S'_{i^*}, S_{-j}) \leq \alpha \cdot c_{i^*}(S'_{i^*}, S_{-i^*})$$

(Warum?)

Konvergenz zum approximativen Gleichgewicht

- ▶ Relative ϵ -Dynamik hat aber Spieler i^* gewählt, daher:

$$\frac{c_{i^*}(S) - c_i(S'_{i^*}, S_{-i^*})}{c_{i^*}(S)} \geq \frac{c_j(S) - c_j(S'_{i^*}, S_{-j})}{c_j(S)} \geq \frac{c_j(S) - \alpha c_i(S'_{i^*}, S_{-i^*})}{c_j(S)}$$

- ▶ Umformung des ersten und dritten Bruchs ergibt: $c_{i^*}(S) \geq c_j(S)/\alpha$.

Der *wechselnde Spieler* i^* in S ist also – bis auf einen Faktor α – auch der Spieler mit *maximalen Kosten*: $c_{i^*}(S) \geq \max_j c_j(S)/\alpha$.

Damit wissen wir:

$$\begin{aligned} \Phi(S) - \Phi(S'_{i^*}, S_{-i^*}) &\geq \epsilon \cdot c_{i^*}(S) \geq \frac{\epsilon}{\alpha} \cdot \max_j c_j(S) \\ &\geq \frac{\epsilon}{\alpha} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_j c_j(S) \geq \frac{\epsilon}{n\alpha} \cdot \Phi(S) \end{aligned}$$

Konvergenz zum approximativen Gleichgewicht

Das Potenzial verringert sich also in jedem Verbesserungsschritt der relativen ε -Dynamik um einen Faktor von $\varepsilon/(n\alpha)$. Seien S^0, S^1, S^2, \dots die resultierende Folge von Zuständen (mit $S = S^0$), dann gilt

$$\Phi(S^k) \leq \Phi(S^0) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{n\alpha}\right)^k.$$

Wir drücken nun k als Vielfaches von $n\alpha/\varepsilon$ aus und beobachten

$$\Phi(S) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{n\alpha}\right)^k = \Phi(S) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{n\alpha}\right)^{\ell \cdot n\alpha/\varepsilon} \leq \Phi(S) \cdot \frac{1}{e^\ell}$$

da $(1-x)^{1/x} \leq (e^{-x})^{1/x} = 1/e$ für alle $0 < x \leq 1$. Wenn ℓ so groß wird, dass

$$\Phi(S)/e^\ell \leq \Phi^*$$

gilt, dann kann es keine Verbesserung mehr geben.

Konvergenz zum approximativen Gleichgewicht

Daraus folgt, dass bei

$$\ell \geq \ln \frac{\Phi(S)}{\Phi^*}$$

keine Verbesserung mehr stattfinden kann. Daher gilt, dass die Anzahl k der Schritte der relativen ε -Dynamik von Zustand S bis zum ε -approximativen Nash-Gleichgewicht höchstens

$$k = \frac{n\alpha}{\varepsilon} \cdot \ell \leq \frac{n\alpha}{\varepsilon} \cdot \ln \frac{\Phi(S)}{\Phi^*}$$

betragen kann. □

Dieses Resultat gilt nicht mehr in (1) *asymmetrischen* Spielen mit α -sprungbeschränkten Funktionen oder (2) *symmetrischen* Spielen, in denen die Latenzfunktionen *nicht* α -sprungbeschränkt sind.

Auslastungsspiele

Konvergenzzeit in Auslastungsspielen

Komplexität von reinen Nash-Gleichgewichten

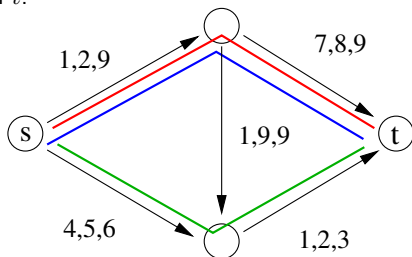
Ordinale Potenziale und Schwache Kreisfreiheit

Wir untersuchen die Komplexität des Auffindens von reinen Nash-Gleichgewichten in Klassen von Auslastungsspielen.

Wir beschränken uns auf Spiele mit nicht-fallenden Latenzfunktionen.

Symmetrische Netzwerkspiele

- ▶ Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Latenzfunktionen $d_e : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $e \in E$.
- ▶ Spieler i wählt einen Pfad mit kleinsten Kosten zwischen Startknoten s und Zielknoten t .



- ▶ In allgemeineren *asymmetrischen* Netzwerkspielen können die Spieler unterschiedliche Start- und Zielknoten haben.

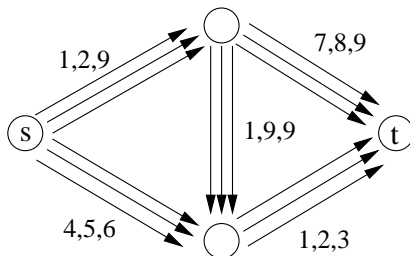
Symmetrische Netzwerkspiele

- ▶ Es gibt sogar symmetrische Netzwerkspiele mit Startzuständen, so dass jede Verbesserungsfolge zu einem reinen Nash-Gleichgewicht exponentielle Länge hat.
- ▶ Daher sind Verbesserungsfolgen keine **effizienten** (d.h. Polynomzeit) Algorithmen zur Berechnung von reinen Nash-Gleichgewichten in diesen Spielen.
- ▶ Es gibt allerdings andere Algorithmen, die ein Nash-Gleichgewicht in polynomieller Zeit finden...

Komplexität in symmetrischen Netzwerkspielen

Effizienter Algorithmus durch Reduktion auf Netzwerkfluß:

- ▶ Jede Kante wird ersetzt durch n parallele Kanten mit (jeweils) Kapazität 1.
- ▶ Die i -te Kopie von Kante e hat Kosten $d_e(i)$, $1 \leq i \leq n$.



- ▶ Wir berechnen einen Min-Cost-Flow, d.h. einen Netzwerkfluß mit Wert n von s nach t , der die Kosten der benutzten Kantenkopien minimiert.
- ▶ Die optimale Lösung minimiert Rosenthals Potenzialfunktion und liefert damit ein reines Nash-Gleichgewicht.

Beziehung zur lokalen Suche

Rosenthals Potenzialfunktion erlaubt eine Interpretation von Auslastungsspielen als lokales Sucheproblem:

Nash-Gleichgewichte sind lokale Optima bzgl. der Potenzialfunktion.

Wie schwierig ist die Berechnung von lokalen Optima?

Die Komplexitätsklasse PLS

Definition (PLS (Polynomial Local Search))

PLS enthält Suchprobleme mit einer Zielfunktion und einer gegebenen Nachbarschaftsbeziehung Γ . Es muss einen Polynomialzeit-Algorithmus geben, der für jede Lösung s ,

- ▶ eine Lösung in $\Gamma(s)$ mit besserem Zielfunktionswert berechnet, oder
- ▶ wenn s ein lokales Optimum ist, dies korrekt ausgibt.

Beispiele für Probleme in PLS

- ▶ FLIP (Evaluation von Schaltkreisen mit Flip-Nachbarschaft)
- ▶ TSP with 2-Opt-Nachbarschaft
- ▶ Pos-NAE- k -SAT mit Flip-Nachbarschaft
- ▶ Max-Cut mit Flip-Nachbarschaft
- ▶ Auslastungsspiele bzgl. Verbesserungsschritte

Positive Not-All-Equal k -Sat (Pos-NAE- k -SAT) – Definition

Eingabe:

Formel aus n binären Variablen x_1, \dots, x_n beschrieben durch

- ▶ m Klauseln c_1, \dots, c_m mit jeweils k positiven Literalen, und
- ▶ m Gewichte w_1, \dots, w_m .

- ▶ Klausel c_i ist **erfüllt** durch eine Zuweisung $A \in \{0, 1\}^n$ wenn ihre Literale nicht alle den gleichen Wert haben.
- ▶ Der **Wert** einer Zuweisung ist die Summe der Gewichte der erfüllten Klauseln.
- ▶ Zuweisungen A und A' sind **benachbart** wenn sie sich in genau einer Position unterscheiden.

Aufgabe:

Finde ein **lokales Optimum**, d.h. eine Zuweisung ohne benachbarte Zuweisung mit höherem Wert.

Positive Not-All-Equal 3-SAT (Pos-NAE-3-SAT) – Beispiel

Beispiel für Pos-NAE-3SAT:

$$c_1 = x_1x_2x_3; c_2 = x_1x_2x_4; c_3 = x_1x_2x_5; c_4 = x_3x_4x_5$$

$$w_1 = 100; w_2 = 110; w_3 = 120; w_4 = 100$$

Ein Beispiel für ein **lokales Optimum** ist die Zuweisung

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 1; x_4 = 1; x_5 = 1$$

mit Wert 330. Jede der fünf benachbarten Zuweisungen hat einen Wert von höchstens 330.

Max-Cut – Definition

Eingabe:

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w : E \rightarrow \mathbb{N}$.

- ▶ Ein **Schnitt** zerteilt V in zwei Mengen *Links* and *Rechts*.
- ▶ Zwei Schnitte sind **benachbart**: Der eine Schnitt entsteht aus dem anderen Schnitt durch Verschieben genau eines Knotens von *Links* nach *Rechts* oder umgekehrt.
- ▶ Der **Wert** eines Schnittes ist das Gesamtgewicht aller Kanten mit einem Endpunkt in *Links* und einem Endpunkt in *Rechts*.

Aufgabe:

Finde ein **lokales Optimum**, d.h. einen Schnitt ohne benachbarten Schnitt mit höherem Wert.

Die Komplexitätsklasse PLS

Definition (PLS-Reduktion)

Gegeben zwei PLS-Probleme Π_1 und Π_2 , finde eine Abbildung der Instanzen von Π_1 auf die Instanzen von Π_2 , so dass

- ▶ die Abbildung in polynomieller Zeit berechnet werden kann,
- ▶ die lokalen Optima von Π_1 auf die lokalen Optima von Π_2 abgebildet werden und
- ▶ aus jedem lokalen Optimum von Π_2 kann man ein lokales Optimum von Π_1 in polynomieller Zeit errechnen.

Erstes Beispiel einer PLS-Reduktion

Satz

$$\text{Pos-NAE-3-SAT} \leq_{\text{PLS}} \text{Pos-NAE-2-SAT}$$

Beweis:

Für jede 3-Klausel (x_1, x_2, x_3) mit Gewicht w erstelle die drei 2-Klauseln (x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_2, x_3) , jede mit Wert $w/2$.

Der Wert einer Zuweisung in der 2-SAT Instanz ist identisch zum Wert in der 3-SAT Instanz, da eine 3-Klausel erfüllt ist genau dann wenn exakt zwei der drei 2-Klauseln erfüllt sind.

Daher sind die lokalen Optima in beiden Instanzen genau gleich. Die Voraussetzungen an eine PLS-Reduktion sind erfüllt. □

Noch ein Beispiel einer PLS-Reduktion

Satz

$$\text{Pos-NAE-2-SAT} \leq_{\text{PLS}} \text{Max-Cut}$$

Beweis:

Jede Variable wird durch einen Knoten repräsentiert. Jede Klausel und ihr Gewicht werden durch eine Kante repräsentiert. Mehrfachkanten werden in eine einzelne Kante zusammengefügt.

Bei einer Zuweisung für die Variablen interpretieren wir 0 als *Links* und 1 als *Rechts*. Auf diese Weise sind die lokalen Optima in beiden Instanzen genau gleich. Die Voraussetzungen an eine PLS-Reduktion sind erfüllt. \square

Die Komplexitätsklasse PLS

Definition (PLS-Vollständigkeit)

Ein Problem Π^* in PLS heißt **PLS-vollständig** wenn für jedes Problem Π in PLS gilt $\Pi \leq_{\text{PLS}} \Pi^*$.

Beispiele für PLS-vollständige Probleme:

- ▶ Eine Masterreduktion zeigt PLS-Vollständigkeit von FLIP.
- ▶ Eine PLS-Reduktion von FLIP zu Pos-NAE-3-SAT zeigt, dass das letztere Problem auch PLS-vollständig ist.
- ▶ Also sind Pos-NAE-2-SAT und Max-Cut ebenfalls PLS-vollständig.

Reine Nash-Gleichgewichte in Auslastungsspielen

Satz (Fabrikant, Papadimitriou, Talwar 2004)

Für die Komplexität von reinen Nash-Gleichgewichten in Auslastungsspielen gilt:

	Netzwerkspiele	allgemeine Auslastungsspiele
symmetrisch	\exists Poly-Zeit Algo	PLS-vollständig
asymmetrisch	PLS-vollständig	PLS-vollständig

Wir zeigen nur einen der PLS-Vollständigkeitsbeweise, den für allgemeine, asymmetrische Auslastungsspiele.

PLS-Härte in allgemeinen Auslastungsspielen

Wir zeigen eine PLS-Reduktion von Max-Cut zu Auslastungsspielen.

Zuerst interpretieren wir Max-Cut als ein Spiel:

Max-Cut-Spiel

Spieler sind Knoten in einem gewichteten Graphen $G = (V, E)$.

- ▶ Jeder Spieler hat 2 Strategien: *Links* or *Rechts*.
- ▶ Ein Zustand des Spiels erzeugt einen **Schnitt**, d.h. eine Aufteilung von V in linke und rechte Knoten.
- ▶ Kantengewichte erfassen die Antipathie zwischen den Spielern.
- ▶ Spieler wählen eine Strategie, so dass die Summe der Gewichte der inzidenten Kanten zur anderen Knotenmenge am höchsten ist.
- ▶ Reine Nash-Gleichgewichte sind genau lokale Optima von Max-Cut.

PLS-Härte in allgemeinen Auslastungsspielen

Minimierungsvariante des Max-Cut-Spiels

Die Strategien eines Knotens sind

- ▶ **links:** wähle linke Seite des Schnittes
- ▶ **rechts:** wähle rechte Seite des Schnittes

Die Kosten dieser Strategien sind

- ▶ **links:** Summe der Gewichte der inzidenten Kanten zu linken Spielern
- ▶ **rechts:** Summe der Gewichte der inzidenten Kanten zu rechten Spielern

Beide Spiele haben den gleichen Übergangsgraphen:

Ein Spieler *minimiert* die Gewichte der inzidenten Kanten zu Spielern auf "seiner Seite" \Leftrightarrow Er *maximiert* die Gewichte der inzidenten Kanten zu Spielern auf der "anderen Seite".

PLS-Härte in allgemeinen Auslastungsspielen

Die Minimierungsvariante ist ein Auslastungsspiel.

Max-Cut Auslastungsspiel:

- ▶ Repräsentiere jede Kante e durch zwei Ressourcen e_{links}, e_{rechts} mit Latenzfunktionen $d(1) = 0$ and $d(2) = w_e$.
- ▶ Für jeden Spieler enthält die Strategy S_{links} die Ressourcen e_{links} aller inzidenten Kanten; Strategie S_{rechts} enthält die Ressourcen e_{rechts} aller inzidenten Kanten.

Die Spieler in diesem Auslastungsspiel haben genau die gleichen Kosten wie die Spieler in der Minimierungsvariante des Max-Cut-Spiels.

Daher sind die reinen Nash-Gleichgewichte dieses Auslastungsspiels genau die lokalen Optima der Max-Cut Instanz. Damit haben wir eine PLS-Reduktion von Max-Cut zu Auslastungsspielen gezeigt. □

Auslastungsspiele

Konvergenzzeit in Auslastungsspielen

Komplexität von reinen Nash-Gleichgewichten

Ordinale Potenziale und Schwache Kreisfreiheit

Potenzialspiele

Ein exaktes Potenzial garantiert die endliche Verbesserungseigenschaft und damit die Existenz eines reinen Nash-Gleichgewichts. Man kann die Definition eines Potenzialspiels allerdings noch deutlich allgemeiner fassen, ohne dabei die endliche Verbesserungseigenschaft zu verlieren.

Definition (Ordinales Potenzialspiel)

Ein strategisches Spiel $\Gamma = (\mathcal{N}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{N}}, (c_i)_{i \in \mathcal{N}})$ besitzt eine **ordinale Potenzialfunktion** $\Phi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, wenn für jedes $i \in \mathcal{N}$, für jedes $S_{-i} \in \Sigma_{-i}$, und für jede $S_i, S'_i \in \Sigma_i$ gilt:

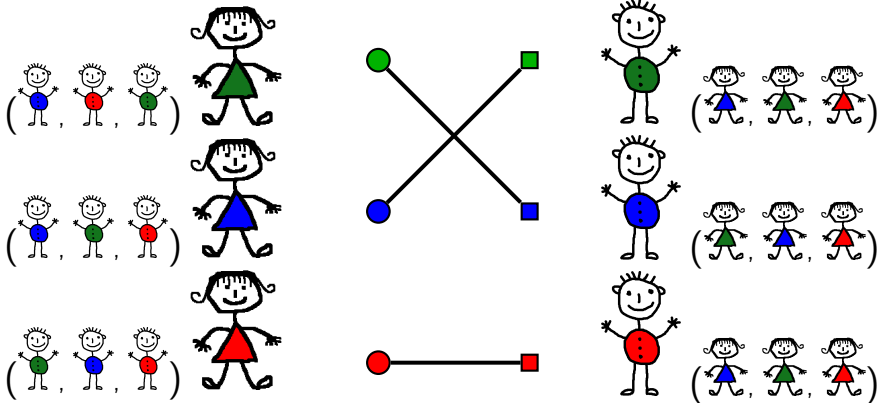
$$c_i(S_i, S_{-i}) - c_i(S'_i, S_{-i}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(S_i, S_{-i}) - \Phi(S'_i, S_{-i}) > 0 .$$

Ein solches Spiel nennen wir **ordinales Potenzialspiel**.

Beobachtung:

Sei Γ ein ordinales Potenzialspiel. Dann hat Γ die **endliche Verbesserungseigenschaft**, und daher existiert ein reines Nash-Gleichgewicht.

Stabiles Matching



Jeder Spieler hat eine Präferenzordnung über die Spieler der anderen Seite
 Ordnung: (besten Partner, zweitbesten, ...).

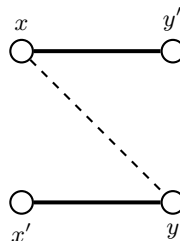
Stabiles Matching

- ▶ Menge \mathcal{X} von n Männern, Menge \mathcal{Y} von n Frauen
- ▶ Jeder Mann $x \in \mathcal{X}$ hat Präferenzordnung \succ_x über alle $y \in \mathcal{Y}$.
- ▶ Jede Frau $y \in \mathcal{Y}$ hat Präferenzordnung \succ_y über alle $x \in \mathcal{X}$.
- ▶ Jede Person ist lieber verpartnert als allein.
- ▶ Für ein Matching M sei $M(x) \in \mathcal{Y}$ die Partnerin von Mann $x \in \mathcal{X}$ in M , und $M(y) \in \mathcal{X}$ der Partner von Frau $y \in \mathcal{Y}$ in M .
- ▶ Sei $M(x) = *$ wenn x allein in M , und $M(y) = *$ genauso.

Stabiles Matching

Wann ist ein Matching stabil? Was ist eine Gefahr für Stabilität?

- ▶ In M ist $\{x, y\}$ ein **blockierendes Paar** genau dann wenn x und y sich gegenseitig lieber mögen als ihre jeweiligen Partner $y' = M(x)$ und $x' = M(y)$.
- ▶ Ein Matching M ohne blockierendes Paar ist ein **stabiles Matching**.



Stabiles Matching spielt eine entscheidende Rolle in vielen Anwendungen:

Ärzte/Krankenhäuser Uni-Zulassung Arbeitsmarkt etc.



Stabiles Matching als strategisches Spiel

Wir betrachten das Modell hier als **strategisches Spiel**:

- ▶ Spieler sind die Männer \mathcal{X} . Strategiemenge für jeden Mann $x \in \mathcal{X}$ ist die Menge der Frauen $\Sigma_x = \mathcal{Y}$. Als Strategie wählt ein Mann eine Frau und “macht ihr einen Antrag”.
- ▶ Wir drücken Präferenzordnungen durch Kosten aus: Jeder Match $\{x, y\}$ liefert Kostenwerte $c_x(y) > 0$ und $c_y(x) > 0$ für die Beteiligten, wobei gilt

$$\begin{aligned}
 c_x(y) > c_x(y') & \Leftrightarrow y' \succ_x y, \\
 c_y(x) > c_y(x') & \Leftrightarrow x' \succ_y x, \\
 c_y(*) = c_x(*) = \infty & \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}.
 \end{aligned}$$

Stabiles Matching als strategisches Spiel

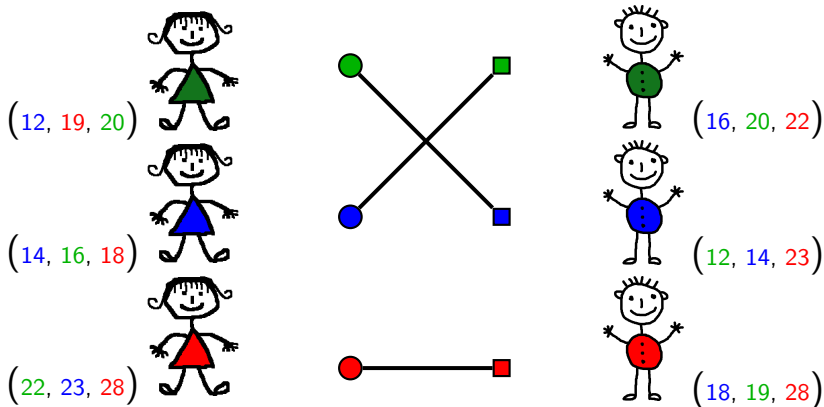
- ▶ In einem Zustand S wählt jeder Mann $x \in \mathcal{X}$ eine Frau $y_x \in \mathcal{Y}$. In S erhält also jede Frau $y \in \mathcal{Y}$ eine (evtl. leere) Menge $A_y(S)$ von Anträgen.
- ▶ Ein Match ergibt sich nur mit $x_y^* = \arg \min \{c_y(x) \mid x \in A_y(S)\}$, also dem Mann der y aus der Menge $A_y(S)$ am besten gefällt.
- ▶ x erhält in S also Kosten $c_x(S) = c_x(M_S(x))$, wobei $M_S(x)$ sein Match in Zustand S ist (Beachte: $M_S(x) = *$ ist möglich).

Beobachtung:

Ein Zustand S im Spiel ist ein reines Nash-Gleichgewicht

⇔ Die Menge der Matches ist ein stabiles Matching.

Repräsentation durch Kostenwerte



In dieser Instanz ist sogar eine Repräsentation der Präferenzordnungen durch korrelierte Kostenwerte möglich.

Gewichtetes Stabiles Matching

Wir betrachten hier zuerst **gewichtetes** oder **korreliertes stabiles Matching**. Jedes mögliche Paar $e = \{x, y\}$ erzeugt dabei Kosten von $c(x, y) > 0$ für beide Spieler. Es gilt also $c_x(y) = c_y(x) = c(x, y)$.

Die Präferenzen der Spieler sind über die Werte $c(x, y)$ korreliert – je kleiner der Wert, desto attraktiver ist die Paarung **für beide Partner**.

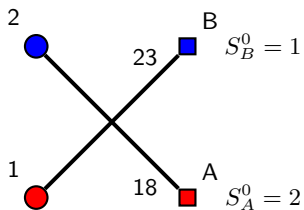
Satz

Gewichtetes stabiles Matching ist ein ordinales Potenzialspiel. Wenn alle Werte $c(x, y)$ paarweise verschieden sind, dann ist das reine Nash-Gleichgewicht eindeutig.

Beweis:

Betrachte Zustand S und die Menge M_S der Matches. Wir nutzen als Potenzial $\Phi(S)$ den **Vektor der Kostenwerte der Männer $c_x(S)$ sortiert in nicht-fallender Reihenfolge**. Sei nun $\Phi(S) < \Phi(S')$ wenn der Vektor für Zustand S **lexikografisch kleiner** ist als der Vektor für Zustand S' .

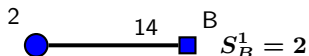
Beispiel



Wir betrachten obige Beispiel-Instanz und durchlaufen eine Verbesserungsfolge vom Zustand S^0 . Der sortierte Vektor der Kostenwerte der Spieler sinkt lexikografisch in jedem Verbesserungsschritt.

Zustand	Sortierte Kosten
S^0	18, 20, 23

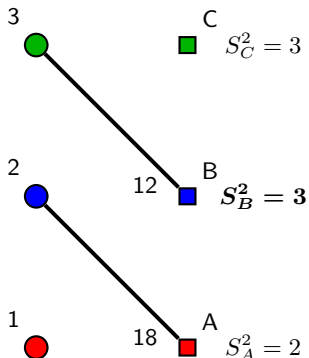
Beispiel



Wir betrachten obige Beispiel-Instanz und durchlaufen eine Verbesserungsfolge vom Zustand S^0 . Der sortierte Vektor der Kostenwerte der Spieler sinkt lexikografisch in jedem Verbesserungsschritt.

Zustand	Sortierte Kosten
S^0	18, 20, 23
S^1	14, 20, ∞

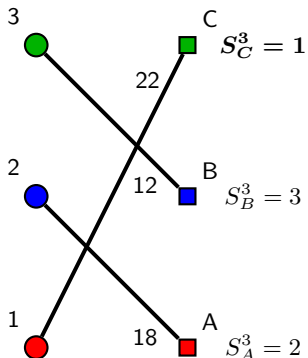
Beispiel



Wir betrachten obige Beispiel-Instanz und durchlaufen eine Verbesserungsfolge vom Zustand S^0 . Der sortierte Vektor der Kostenwerte der Spieler sinkt lexikografisch in jedem Verbesserungsschritt.

Zustand	Sortierte Kosten
S^0	18, 20, 23
S^1	14, 20, ∞
S^2	12, 18, ∞

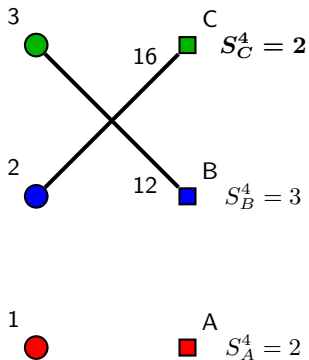
Beispiel



Wir betrachten obige Beispiel-Instanz und durchlaufen eine Verbesserungsfolge vom Zustand S^0 . Der sortierte Vektor der Kostenwerte der Spieler sinkt lexikografisch in jedem Verbesserungsschritt.

Zustand	Sortierte Kosten
S^0	18, 20, 23
S^1	14, 20, ∞
S^2	12, 18, ∞
S^3	12, 18, 22

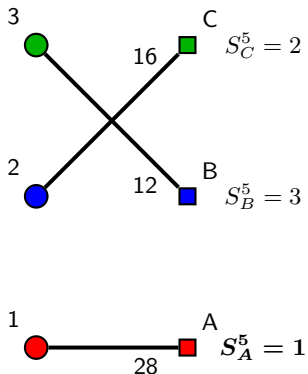
Beispiel



Wir betrachten obige Beispiel-Instanz und durchlaufen eine Verbesserungsfolge vom Zustand S^0 . Der sortierte Vektor der Kostenwerte der Spieler sinkt lexikografisch in jedem Verbesserungsschritt.

Zustand	Sortierte Kosten
S^0	18, 20, 23
S^1	14, 20, ∞
S^2	12, 18, ∞
S^3	12, 18, 22
S^4	12, 16, ∞

Beispiel



Wir betrachten obige Beispiel-Instanz und durchlaufen eine Verbesserungsfolge vom Zustand S^0 . Der sortierte Vektor der Kostenwerte der Spieler sinkt lexikografisch in jedem Verbesserungsschritt.

Zustand	Sortierte Kosten
S^0	18, 20, 23
S^1	14, 20, ∞
S^2	12, 18, ∞
S^3	12, 18, 22
S^4	12, 16, ∞
S^5	12, 16, 28
	reines NG

Ordinales Potenzial für gewichtetes stabiles Matching

Sei x ein Mann, der von Strategie y zu y' wechselt und sich dabei strikt verbessert. Seien S und S' die resultierenden Zustände. Da x sich strikt verbessert, ist er natürlich in S' zu y' gematcht. Je nachdem ob x und y' auch in S gematcht waren, ergeben sich vier Fälle (siehe unten).

In jedem Fall ist der kleinste hinzugefügte Kostenwert $c(x, y')$, und er ist immer strikt kleiner als der kleinste entfernte Kostenwert. Damit sinkt der sortierte Vektor der Kostenwerte der Männer lexikografisch ab. Das Spiel hat eine ordinale (genauer: eine lexikografische) Potenzialfunktion.

1. $\{x, y\} \in M_S$, y' ungematcht in S :

Es gilt $c_x(S) = c(x, y) > c(x, y') = c_x(S')$. In der sortierten Folge der Kostenwerte wird $c(x, y)$ durch $c(x, y')$ ersetzt. Wenn y noch einen weiteren Antrag in S ausser von x hat, dann hat sie auch einen Antrag in S' . Dann wird für den besten Mann $x'' \in A_y(S')$ in der sortierten Folge ∞ durch $c(x'', y)$ ersetzt.

Ordinales Potenzial für gewichtetes stabiles Matching

2. $\{x, y\} \notin M_S$, y' ungematcht in S :
 Es gilt $c_x(S) = \infty > c(x, y') = c_x(S')$. In der sortierten Folge der Kostenwerte wird ∞ durch $c(x, y')$ ersetzt.

3. $\{x, y\} \in M_S$, $\exists x' \in \mathcal{X}$ mit $\{x', y'\} \in M_{S'}$:
 Es gilt $c_x(S) = c(x, y) > c(x, y') = c_x(S')$. Da $\{x, y'\} \in M_{S'}$ gilt $c(x', y') > c(x, y')$. In der sortierten Folge der Kostenwerte wird $c(x, y)$ durch $c(x, y')$ und $c(x', y')$ durch ∞ ersetzt. Wenn y noch einen weiteren Antrag in S ausser von x hat, dann hat sie auch einen Antrag in S' . Dann wird für den besten Mann $x'' \in A_y(S')$ in der sortierten Folge ∞ durch $c(x'', y)$ ersetzt.

4. $\{x, y\} \notin M_S$, $\exists x' \in \mathcal{X}$ mit $\{x', y'\} \in M_{S'}$:
 Es gilt $c_x(S) = \infty > c(x, y') = c_x(S')$. Da $\{x, y'\} \in M_{S'}$ gilt $c(x', y') > c(x, y')$. In der sortierten Folge der Kostenwerte wird ∞ durch $c(x, y')$ und $c(x', y')$ durch ∞ ersetzt.

Eindeutigkeit

Seien nun alle Werte $c(x, y)$ paarweise unterschiedlich. Betrachte das Paar $\{x_0, y_0\}$ mit dem kleinsten Kostenwert. In jedem Zustand S ist y_0 die eindeutige beste Antwort für Spieler x_0 , denn der Match liefert die kleinsten Kosten und y_0 wird seinen Antrag immer annehmen. Daher muss x_0 in jedem reinen Nash-Gleichgewicht Strategie y_0 wählen.

Von den übrigen möglichen Paaren betrachte nun wieder das verbleibende Paar $\{x_1, y_1\}$ mit kleinstem Kostenwert (also mit $x_1 \neq x_0$ und $y_1 \neq y_0$). Unter der Bedingung, dass x_0 und y_0 beide vergeben sind, liefert der Match die kleinsten Kosten für x_1 und y_1 . Daher ist y_1 die eindeutige beste Antwort für x_1 , denn sie wird seinen Antrag annehmen. Daher muss x_1 in jedem reinen Nash-Gleichgewicht Strategie y_1 wählen.

Induktiv angewendet zeigt dieses Argument, dass das reine Nash-Gleichgewicht eindeutig ist. □

Verbesserungsfolgen

Mit der letzten Überlegung können wir auch Algorithmen konstruieren. Für eine kurze Verbesserungsfolge wählen wir in jedem Schritt den Spieler, der durch seine Abweichung den kleinsten Kostenwert erzielen kann. Dann weicht immer zuerst x_0 zu y_0 ab, dann x_1 zu y_1 , etc.

Der Greedy-Algorithmus wendet diese Strategie mit dem leeren Matching an und versucht, die Kanten in der Reihenfolge aufsteigender Kosten in das Matching einzufügen. Dann wird immer zuerst $\{x_0, y_0\}$ eingefügt, dann $\{x_1, y_1\}$, etc.

Korollar

1. *Es gibt von jedem Zustand S eine Verbesserungsfolge zum reinen Nash-Gleichgewicht mit höchstens n Schritten.*
2. *Ein reines Nash-Gleichgewicht kann mit einem Greedy-Algorithmus in Zeit $O(n^2 \log n)$ berechnet werden.*

Das Korollar gilt auch, wenn die Werte $c(x, y)$ nicht paarweise verschieden sind (Warum?)

Wenn die Präferenzen nicht korreliert sind...

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall des Matchingspiels, in dem die Kosten eventuell nicht mehr korreliert sind. Der Einfachheit halber nehmen wir als **Kostenwert die Position des Partners in der Präferenzordnung**.

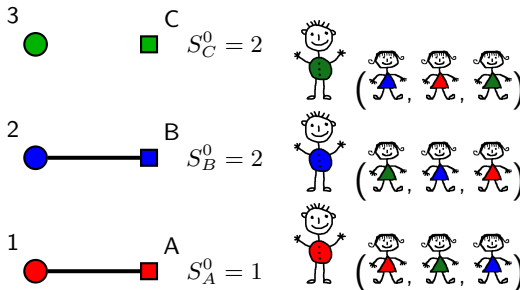
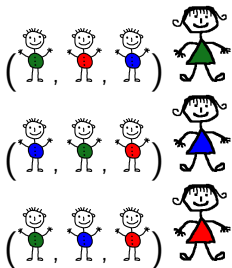
Sei $\succ_x = (y_1, \dots, y_n)$ die Präferenzordnung von Mann $x \in \mathcal{X}$. Dann ist $c_x(y_k) = k$ für $k \in \{1, \dots, n\}$ und $c_x(*) = n + 1$. Die Kosten $c_y(x)$ werden analog definiert. In einem Zustand S ergibt sich wieder ein Matching M_S und die Kosten $c_x(S) = c_x(M_S(x))$.

Wenn die Präferenzen der Spieler nicht korreliert sind, dann gibt es Matchingspiele, die keine endliche Verbesserungseigenschaft haben. Sogar wenn die Spieler nur **beste Antworten** spielen, kann es **kreisende Folgen** geben. Also gibt es i.A. keine ordinale Potenzialfunktion.

Keine Potenzialfunktion

Proposition

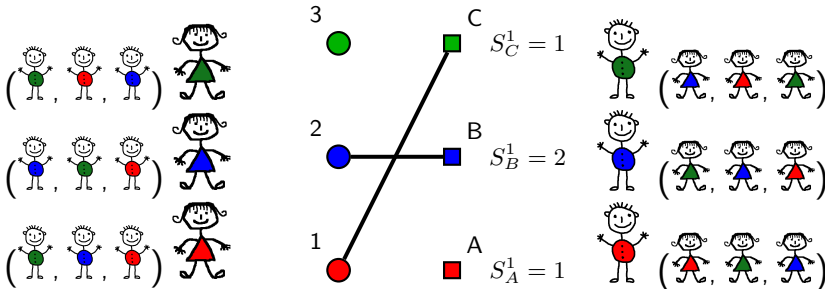
Es gibt Matchingspiele mit Folgen von besten Antworten, die in einen Kreis führen. Diese Spiele haben keine endliche Verbesserungseigenschaft.



Keine Potenzialfunktion

Proposition

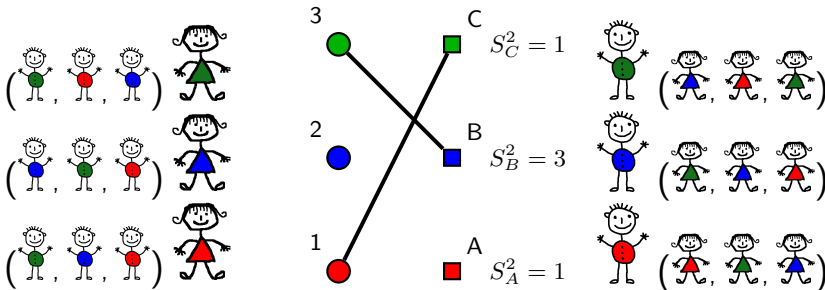
Es gibt Matchingspiele mit Folgen von besten Antworten, die in einen Kreis führen. Diese Spiele haben keine endliche Verbesserungseigenschaft.



Keine Potenzialfunktion

Proposition

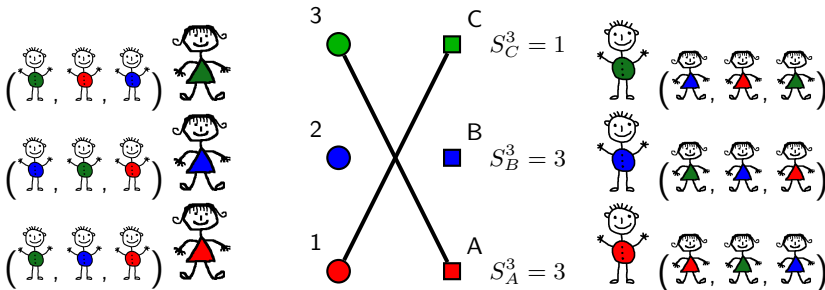
Es gibt Matchingspiele mit Folgen von besten Antworten, die in einen Kreis führen. Diese Spiele haben keine endliche Verbesserungseigenschaft.



Keine Potenzialfunktion

Proposition

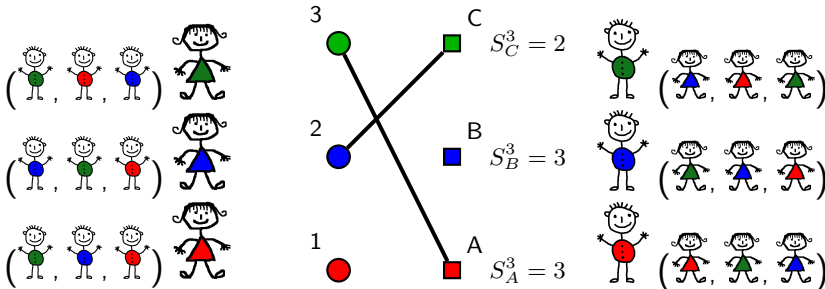
Es gibt Matchingspiele mit Folgen von besten Antworten, die in einen Kreis führen. Diese Spiele haben keine endliche Verbesserungseigenschaft.



Keine Potenzialfunktion

Proposition

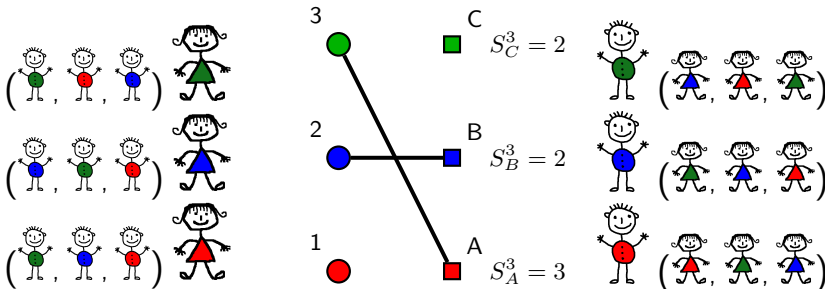
Es gibt Matchingspiele mit Folgen von besten Antworten, die in einen Kreis führen. Diese Spiele haben keine endliche Verbesserungseigenschaft.



Keine Potenzialfunktion

Proposition

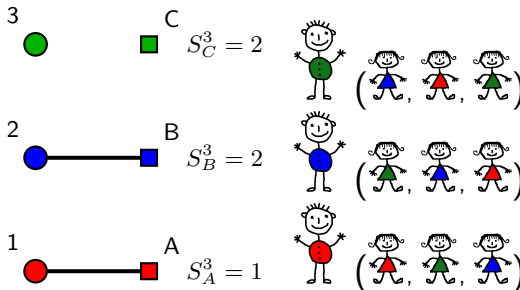
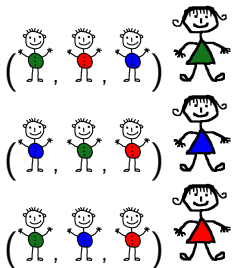
Es gibt Matchingspiele mit Folgen von besten Antworten, die in einen Kreis führen. Diese Spiele haben keine endliche Verbesserungseigenschaft.



Keine Potenzialfunktion

Proposition

Es gibt Matchingspiele mit Folgen von besten Antworten, die in einen Kreis führen. Diese Spiele haben keine endliche Verbesserungseigenschaft.



Existenz und Berechnung

Im Matchingspiel gibt es eventuell kreisende Verbesserungsfolgen, aber auch immer ein reines Nash-Gleichgewicht (stabiles Matching)

Algorithm 1: Deferred-Acceptance (DA) Algorithmus mit Männerantrag

Initialisiere $\succ'_x = \succ_x$ for all $x \in \mathcal{X}$

while es gibt ungematchten Mann $x \in \mathcal{X}$ mit $\succ'_x \neq \emptyset$ **do**

 Jeder Mann $x \in \mathcal{X}$ wählt beste Frau in \succ'_x als Strategie S_x

 Jede Frau $y \in \mathcal{Y}$ behält den besten Mann in $A_y(S)$

y lehnt jeden weiteren Antrag aus $A_y(S)$ ab

 Wenn sein Antrag abgelehnt wird, löscht Mann x die beste Frau aus \succ'_x

Satz (Gale, Shapley 1962)

Jedes Matchingspiel hat ein stabiles Matching. Für gegebene Präferenzlisten kann ein stabiles Matching in Zeit $O(n^2)$ berechnet werden.

Existenz und Berechnung

Beweis:

Der DA Algorithmus berechnet ein Matching und kann offensichtlich in Zeit $O(n^2)$ implementiert werden. Während der Ausführung des Algorithmus gilt:

1. Für jeden Mann sinkt seine Präferenz für die Frau, der er einen Antrag macht.
2. Für jede Frau steigt ihre Präferenz für den gematchten Partner.

Für einen Widerspruch nehmen wir an, das finale Matching M hat ein blockierendes Paar $\{x, y\}$ mit $y \succ_x M(x)$ und $x \succ_y M(y)$. x muss y einen Antrag gemacht und abgelehnt worden sein. Also hat y einen Antrag eines besseren Mannes bekommen $x' \succ_y x$. Daher kann sie nur zu einem (noch) besseren Mann in M gematched sein. Also gilt $M(y) \succeq_y x' \succ_y x$, ein Widerspruch zu $x \succ_y M(y)$. □

Mit einer Reformulierung dieser Idee zeigen wir eine noch stärkere Eigenschaft.

Eine endliche Verbesserungsfolge

Satz

Für jedes Matchingspiel und jeden initialen Zustand S^0 gibt es eine Folge von höchstens $2n^2$ besten Antworten in ein reines Nash-Gleichgewicht.

Beweis:

Die Folge hat zwei Phasen. In **Phase 1** dürfen nur **gematchte Männer** beste Antworten spielen. Sei X die Menge der gematchten Männer in S . Die Funktion Φ sinkt in Phase 1:

$$\Phi(S) = \sum_{x \in X} c_x(S). \quad (\text{Rang von } x\text{'s Partnerin in } \succ_x)$$

In einer Runde weicht Mann $x \in X$ zu einer besten Antwort ab.

- ▶ x bleibt gematched, verbessert Präferenz für die Partnerin um mind. 1.
- ▶ Mann $x' \in X$ kann seine Partnerin verlieren. Also weniger Spieler in X , Φ sinkt um mind. 1.

Φ sinkt also um mind. 1 in jeder Runde. Es gilt $1 \leq \Phi(M) \leq n^2$, also endet Phase 1 nach maximal n^2 Runden.

Eine endliche Verbesserungsfolge

In **Phase 2** dürfen nur **ungematchte Männer** beste Antworten spielen. Sei Y die Menge der gematchten Frauen in S . Die Funktion Ψ steigt in Phase 2:

$$\Psi(S) = \sum_{y \in Y} (n + 1 - c_y(S)).$$

In einer Runde weicht ein ungematchter Mann x zu einer besten Antwort ab.

1. x wird gematched zu $y \in Y$: $c_y(S)$ sinkt um mind. 1.
2. x wird gematched zu $y \notin Y$: y wird zu Y hinzugefügt.

Ψ steigt also um mind. 1 in jeder Runde. Es gilt $1 \leq \Psi(M) \leq n^2$, also endet Phase 2 nach maximal n^2 Runden.

Bleibt zu zeigen: Der finale Zustand ist ein stabiles Matching. In Phase 2 kann sich **kein gematchter Mann verbessern**. Wenn ein ungematchter Mann x zu Frau y gematched wird, verringert dies die Kosten von y . Wenn es vorher kein blockierendes Paar mit einem gematchten Mann gab, dann gibt es auch kein solches Paar nachdem x und y gematched sind – x hat eine beste Antwort gespielt und y 's Kosten sind gesunken. Am Ende von Phase 2 kann sich natürlich auch **kein ungematchter Mann verbessern**. □

Schwache Kreisfreiheit

Wir haben damit gezeigt, dass das Matchingspiel schwach kreisfrei ist.

Definition (Schwach kreisfrei)

Ein strategisches Spiel $\Gamma = (\mathcal{N}, (\Sigma_i)_{i \in \mathcal{N}}, (c_i)_{i \in \mathcal{N}})$ heißt **schwach kreisfrei** (engl.: weakly acyclic) wenn es für jeden Zustand S **mindestens eine endliche Verbesserungsfolge** gibt, die von S in ein reines Nash-Gleichgewicht führt.

Wir betrachten **zufällige Verbesserungsfolgen**: In jeder Runde wird uniform zufällig ein Spieler $i \in \mathcal{N}$ ausgewählt. Er wählt uniform zufällig eine neue Strategie $S'_i \in \Sigma_i$ und weicht ab, wenn sie eine strikte Verbesserung darstellt.

Eine zufällige Verbesserungsfolge ist ein Random Walk über die Zustände des Spiels. Reine Nash-Gleichgewichte sind absorbierende Zustände.

Zufällige Verbesserungsfolgen

Beobachtung:

In schwach kreisfreien Spielen konvergieren **zufällige Verbesserungsfolgen mit Wahrscheinlichkeit 1** im Grenzwert zum reinen Nash-Gleichgewicht. Wenn der Walk nur lange genug läuft, führt er irgendwann eine Verbesserungsfolge aus, die in ein reines Nash-Gleichgewicht führt.

Also konvergieren **zufällige Verbesserungsfolgen** in jedem Matchingspiel. Aber **wie lange dauert es** bis ein stabiles Matching erreicht ist? Was passiert, wenn wir zusätzlich auf **zufällige Folgen von besten Antworten** einschränken? Leider gibt es Spiele, in denen gilt mit hoher Wahrscheinlichkeit, dass die Konvergenzzeit exponentiell lang ist.

Satz (Ackermann, Goldberg, Mirrokni, Röglin, Vöcking 2011)

Es gibt ein Matchingspiel und einen Startzustand S^0 , so dass mit Wahrscheinlichkeit $1 - 2^{-\Omega(n)}$ gilt: Die zufällige Verbesserungsfolge von S^0 braucht mindestens $2^{\Omega(n)}$ Runden, um ein stabiles Matching zu erreichen.

Dieses Resultat gilt auch für zufällige Folgen von besten Antworten.

Literatur

- ▶ D. Monderer, L. Shapley. Potential Games. Games and Economic Behavior 14:1124–1143, 1996.
- ▶ A. Fabrikant, C. Papadimitriou, K. Talwar. The Complexity of Pure Nash Equilibria. STOC 2004.
- ▶ S. Jeong, R. McGrew, E. Nudelman, Y. Shoham, Q. Sun. Fast and Compact: A Simple Class of Congestion Games. AAAI 2005. (Singletonspiele)
- ▶ H. Ackermann, H. Röglin, B. Vöcking. On the Impact of Combinatorial Structure on Congestion Games. Journal of the ACM 55(6), 2008. (Matroidspiele, PLS)
- ▶ S. Chien, A. Sinclair. Convergence to Approximate Nash Equilibria in Congestion Games. Games and Economic Behavior 71(2):315–327, 2011.

Mehr Literatur

- ▶ A. Roth, J. Vande Vate. Random Paths to Stability in Two-Sided Matching. *Econometrica* 58(6):1475-1480, 1990. (Schwache Kreisfreiheit)
- ▶ D. Abraham, A. Levavi, D. Manlove, G. O'Malley. The Stable Roommates Problem with Globally Ranked Pairs. *Internet Math.* 5(4):493-515, 2008. (Ordinales Potenzial)
- ▶ F. Mathieu. Self-Stabilization in Preference-based Systems. *Peer-to-Peer Netw. Appl.* 1(2):104-121, 2008. (Ordinales Potenzial)
- ▶ H. Ackermann, P. Goldberg, V. Mirrokni, H. Röglin, B. Vöcking. Uncoordinated Two-Sided Matching Markets. *SIAM J. Comput.* 40(1):92-106, 2011.