Sekretäre und Propheten

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2018

Online Auktionen

In vielen Anwendungen sind Kaufinteressenten nicht alle gleichzeitig in einem Markt sondern kommen und gehen über die Zeit. Daher betrachten wir hier Mechanismen, um ein einzelnes Gut online an einen Bieter zu vergeben, d.h. wenn die Bieter einzeln nacheinander kommen und gehen.

Online Ein-Gut Auktion

- In Runde $i = 1, 2 \ldots$ kommt Bieter a_i und sagt seinen Wert v_{a_i} für das Gut
- Mechanismus entscheidet unmittelbar (ohne restliche Bieter $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ zu kennen), ob a_i das Gut bekommt oder nicht und was er bezahlen muss.
- Falls a_i das Gut bekommt, kann man es ihm nicht mehr wegnehmen. Falls er abgelehnt wird, kann er das Gut später nicht mehr bekommen.

Im Worst-Case ohne Kenntnis über die Anzahl und den maximalen Wert der Bieter ist es unmöglich, das Gut dem besten Bieter zu geben. Sogar bzgl. Approximation des sozialen Nutzens ist jeder Mechanismus im Worst-Case extrem schlecht. Statt Worst-Case Analyse betrachten wir daher im Folgenden zwei stochastische Analysemodelle für die Ankünfte und die Werte der Bieter.

Online Auktionen

Sekretäre und Random Order

Prophetische Ungleichungen

Random-Order Modell

Random-Order Modell

- Werte der Bieter sind unbekannt
- Anzahl n der Bieter ist bekannt
- Bieter kommen an in uniform zufälliger Reihenfolge

Wir wollen sozialen Nutzen maximieren, d.h. das Gut dem Bieter mit höchstem Wert geben. Dies ist das klassische Sekretärproblem: Finde den Bieter mit höchstem Wert bei uniform zufälliger Ankunftsreihenfolge.

Sekretär-Algorithmus

Sei $r \in \{1, \ldots, n\}$ die Sample-Länge

Sample: In Runde $i = 1, \ldots, r$ sagt Bieter a_i Wert v_{a_i}. Er wird abgewiesen.

Akzeptanz: In Runde $i = r + 1, \ldots, n$ sagt Bieter a_i Wert v_{a_i}. Wenn das Gut noch nicht zugewiesen und a_i der bisher höchste Bieter ist, dann weise a_i das Gut zu.

Wettbewerbsfaktor

In diesem und allgemeineren Szenarien bewerten wir Online-Algorithmen mit dem Wettbewerbsfaktor:

- Sei S^* eine optimale Teilmenge von Bietern, die $\sum_{i \in S^*} v_i$ maximiert.
- Online-Algorithmus ist c-kompetitiv: Liefert Teilmenge T von Bietern mit

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i \in T} v_i\right] \quad \geq \quad \frac{1}{c} \cdot \sum_{i \in S^*} v_i$$

  c ist Wettbewerbsfaktor des Algorithmus.
- Beachte: T ist **zufällige Teilmenge**. Randomisierung aufgrund von zufälliger Reihenfolge der Bieter und evtl. interne Randomisierung des Algorithmus.

Betrachte den Algorithmus oben. Für $r = \lfloor n/e \rfloor$ ist die **Wahrscheinlichkeit**, mit der der Algorithmus das Gut dem **höchsten Bieter** gibt, **immer mindestens** $1/e$. Daraus folgt:

Proposition

Der Sekretär-Algorithmus mit $r = \lfloor n/e \rfloor$ ist e-kompetitiv.

Anreizkompatibel

Ein Bieter soll keinen Anreiz zum Lügen haben, selbst wenn er

- alle Werte der anderen Bieter,
- die Ankunftsreihenfolge der Bieter,
- den Mechanismus zur Wahl des Ergebnisses und der Zahlungen, und
- mögliche interne Zufallsbits für Randomisierung im Mechanismus

kennt. Also soll der Bieter am Ende im Nachhinein und für jedes mögliche Ergebnis der Randomisierungen immer noch seinen wahren Wert mitteilen wollen.

Die Mechanismen sollen also (ex-post universell) anreizkompatibel sein.

Betrachte den Sekretär-Algorithmus. Gibt es Zahlungen, so dass daraus ein anreizkompatibler Mechanismus wird?

Dazu müsste der Algorithmus auf jedem Fall monoton sein. Daneben müssen wir unmittelbar bei Zuweisung des Gutes die Zahlungen bestimmen, ohne die Werte der restlichen Bieter zu kennen...

Anreizkompatible Ein-Gut Auktion

Sei $\tau = \max_{i=1,\ldots,r} v_{a_i}$ der **maximale Wert in der Sample-Phase**. Falls der Mechanismus das Gut zuweist, dann sei a_{i^*} der Bieter, der es bekommt. Setze Zahlungen $p_{a_{i^*}}(v) = \tau$ und $p_{a_i}(v) = 0$ für alle $i \neq i^*$.

Proposition

Der Sekretär-Mechanismus ist anreizkompatibel und e-kompetitiv für die Ein-Gut-Auktion im Random-Order Modell.

Beweis:
Betrachte die Bieter bei fester Reihenfolge im Nachhinein.

- Kein Bieter a_i mit $i > i^*$ oder $i \leq r$ kann den Algorithmus durch unilaterale Änderung seines gesagten Wertes v_i dazu bringen, ihm das Gut zuzuweisen.
- Für Bieter a_i mit $i = r+1, \ldots, i^*$ weist der Mechanismus das Gut dem frühesten Bieter mit $v_{a_i} \geq \tau$ zum Preis τ zu.

Bieter a_{i^*} mit $v_{a_{i^*}} \geq \tau$ bekommt das Gut, zahlt τ und ist zufrieden bei wahrem Gebot. Jeder Bieter a_i mit $i = r, \ldots, i^* - 1$ hat $v_{a_i} \leq \tau$, bekommt und zahlt nichts und ist zufrieden bei wahrem Gebot. □

Matroidauktion

Bieter-Packproblem

- Menge N von n Bietern
- Bieter $i \in N$ hat einen privaten Wert $v_i \geq 0$
- Jedes Ergebnis $S \in A \subseteq 2^N$ ist eine Teilmenge von Bietern.
- Binäre Menge von Zeugs: $x_i(S) = 1$ wenn $i \in S$ und 0 sonst.
- A ergibt ein Matroid-Packproblem, d.h. das Paar (N, A) ist ein Matroid (mehr dazu später).

Beispiele:

- Ein-Gut Auktion: $A = \{S \mid 1 \geq |S|\} = N \cup \{\emptyset\}$
- k-Gut Auktion: $A = \{S \mid k \geq |S|\}$
- Waldauktion: Jeder Bieter ist eine Kante in einem bekannten Graphen G. Die Auktion kann eine kreisfreie Teilmenge von Kanten/Bietern wählen $A = \{S \mid S \text{ ist kreisfreie Menge von Kanten in } G\}$
- usw.

Online-Mechanismen für Matroidauktionen

Online Mechanismen

- N und A sind am Anfang bekannt.
- Bieter erscheinen in zufälliger Reihenfolge, sagen bei Ankunft privaten Wert
- Online-Mechanismus entscheidet: Bieter auswählen oder ablehnen? Wenn ausgewählt, was zahlt der Bieter? Wenn abgelehnt, Zahlung 0.
- Jeder Bieter wird entschieden bevor weitere Bieter ankommen
- Entscheidung über Auswahl, Ablehnung und Zahlung ist endgültig

Ziele für den Entwurf von Online-Mechanismen:

1. ex-post universell anreizkompatibel
2. approximiere sozialen Nutzen $\sum_{i \in S} v_i$, möglichst kleiner Wettbewerbsfaktor
3. berechenbar in polynomieller Zeit

Waldauktion

Wir betrachten zuerst Online-Mechanismen für einen graphischen Matroid:

Graphischer Matroid

- Bieter sind Kanten eines zusammenhängenden Graphen $G = (K, E)$
- Ergebnismenge A enthält alle Wälder (kreisfreie Mengen von Kanten).
- Jedes $S \in A$ mit maximaler Kardinalität ist Spannbaum von G
- Jeder Spannbaum besteht aus $k = |K| - 1$ Kanten
- Bieter i hat privaten Wert v_i, wir schreiben $v(S) = \sum_{i \in S} v_i$

Greedy-Algorithmus von Kruskal: Berechnet optimalen Spannbaum mit maximaler Gesamtbewertung

Austauscheigenschaft: Sei S Spannbaum und S^* optimaler Spannbaum. Es gibt Paare von Bietern $(a_1, a_1^*), \ldots, (a_k, a_k^*) \in S \times S^*$ so dass für alle $1 \leq i \leq k$

- $S_i = (S \cup \{a_1^*, \ldots, a_i^*\}) \setminus \{a_1, \ldots, a_i\}$ ist Spannbaum
- $S^* = S_k$
- $v(S_i) \geq v(S_{i-1})$

Eine logarithmische Garantie

Random-Threshold

1. Setze $p_i(v) \leftarrow 0$ für alle Bieter $i \in N$.
2. Lehne die ersten $n/2$ Bieter ab, sei dies die Menge Y.
3. Wähle $j \in \{0, 1, 2, \ldots, \lceil \log k \rceil\}$ uniform zufällig
4. Setze Schranke $\tau \leftarrow \max_{x \in Y} v_x / 2^j$, setze $S \leftarrow \emptyset$
5. In Runde $i = n/2 + 1, \ldots, n$:
6.   Sei a_i der Bieter, der in Runde i ankommt.
7.   **if** $v_{a_i} \geq \tau$ und $(S \cup \{a_i\}) \in A$ **then** $S \leftarrow S \cup \{a_i\}$ und $p_{a_i}(v) \leftarrow \tau$.

Satz

Der Random-Threshold Mechanismus ist anreizkompatibel und $O(\log k)$-kompetitiv für Waldauktionen.

Logarithmischer Faktor

Beweis: Die Argumente zur Anreizkompatibilität sind sehr ähnlich zum Sekretär-Mechanismus (Übung). Wir zeigen hier den Wettbewerbsfaktor.

Wir konzentrieren uns auf Bieter aus S^* mit signifikantem Wert.

- Sei S^* optimaler Spannbaum. Wir nummerieren die k Bieter aus S^* mit $1, \ldots, k$ in absteigender Reihenfolge der Werte $v_1 \geq \ldots \geq v_k$.
- Beachte: v_1 ist der höchste Bieter aus N (Greedy-Algorithmus), aber die anderen sind **nicht unbedingt die nächsten** $k-1$ **Bieter** mit den höchsten Werten aus N.
- Wähle q so dass gilt: $v_q \geq v_1/k$ und entweder $q = k$ oder $v_{q+1} < v_1/k$.
- Beachte:
$$\sum_{i=q+1}^{k} v_i < v_1, \quad \text{daher} \quad \sum_{i=1}^{q} v_i \geq v(S^*)/2.$$
- Die q höchsten Bieter in S^* liefern also mindestens die Hälfte des optimalen sozialen Nutzens.

Logarithmischer Faktor

Die Analyse nutzt Wertklassen basierend auf den Bietern $i = 1, \ldots, k$ aus S^*. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $v_1 > v_2 > \ldots > v_k$.

- Es gibt genau i Bieter in S^* mit Wert mindestens v_i.
- Sei $m_i(T)$ die Anzahl Bieter in $T \subset N$ mit Wert mindestens $v_i/2$.
- Wir sehen, dass

$$\sum_{i=1}^{q} v_i = \left[\sum_{i=1}^{q-1} (v_i - v_{i+1}) \cdot i\right] + v_q \cdot q.$$

- Für jede Menge T ergibt sich

$$v(T) \geq \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{q-1} (v_i - v_{i+1}) \cdot m_i(T)\right] + \frac{1}{2} \cdot v_q \cdot m_q(T).$$

Beweis

Lemma

Sei S die Ergebnismenge von Random-Threshold. Für jedes $i = 1, \ldots, q$ gilt

$$\mathbb{E}[m_i(S)] \quad \geq \quad \frac{1}{8(\lceil \log k \rceil + 1)} \cdot i.$$

Mit diesem Lemma folgt der Satz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[v(S)] &\geq \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{q-1} (v_i - v_{i+1}) \cdot \mathbb{E}[m_i(S)] \right] + \frac{1}{2} \cdot v_q \cdot \mathbb{E}[m_q(S)] \\
&\geq \frac{1}{16(\lceil \log k \rceil + 1)} \left[\sum_{i=1}^{q-1} (v_i - v_{i+1}) \cdot i \right] + \frac{1}{16(\lceil \log k \rceil + 1)} \cdot v_q \cdot q \\
&= \frac{1}{16(\lceil \log k \rceil + 1)} \cdot \sum_{i=1}^{q} v_i \\
&\geq \frac{1}{32(\lceil \log k \rceil + 1)} \cdot v(S^*) \qquad \square
\end{aligned}$$

Beweis des Lemmas

Wir zeigen das Lemma für jeden Wert von i induktiv. Der Induktionsanfang mit $i = 1$ ist einfach (Übung). Betrachten wir also die Fälle $1 < i \leq q$.

- Sei a^* der Bieter mit maximalem Wert.
- Wir bedingen auf ein Ereignis E, dass zwei Annahmen gleichzeitig eintreten: (1) Der höchste Bieter ist im Sample $a^* \in Y$, und (2) für τ wird j so gewählt, dass $v_i \geq v_{a^*}/2^j \geq v_i/2$.
- Wir können S^* mit dem Greedy-Algorithmus berechnen. Daher ist $v_1 = v_{a^*}$ und $v_q \geq v_1/k \geq v_{a^*}/2^{\lceil \log k \rceil}$. Somit gibt es ein passendes j für Annahme (2) in jedem Fall $1 < i \leq q$.
- Der Algorithmus wählt dies passende j mit W.keit $1/(\lceil \log k \rceil + 1)$.
- Die gesamte W.keit von Ereignis E ist damit $\Pr[E] = 1/(2(\lceil \log k \rceil + 1))$.

Beweis des Lemmas

Wir zeigen nun eine Schranke unter der Bedingung, dass Ereignis E eintritt.

- Die höchsten i Bieter aus S^* bilden eine kreisfreie Menge $S' = \{1, \ldots, i\}$. Nach Annahme (2) sind alle Werte $v_1 \geq \ldots \geq v_i \geq \tau = v_{x^*}/2^j$.
- Mit Annahme (1) ist $a^* = 1$ in Y. Daher sind im Erwartungswert mindestens $(i-1)/2 \geq i/4$ Bieter von S' nicht in Y und können vom Algorithmus gewählt werden. Es gilt also $\mathbb{E}[|S' \setminus Y| \mid E] \geq i/4$.
- Wegen der Austauscheigenschaft wird der Algorithmus in diesem Fall auch mindestens $S' \setminus Y$ viele Bieter auswählen. Die erwartete Größe der Ausgabe S des Algorithmus bedingt auf Ereignis E ist also

$$\mathbb{E}[|S| \mid E] \geq \mathbb{E}[|S' \setminus Y| \mid E] \geq i/4.$$

- Da $\tau \geq v_i/2$ und jeder gewählte Bieter einen Wert mindestens τ hat:

$$\mathbb{E}[m_i(S) \mid E] = \mathbb{E}[|S| \mid E] \geq i/4.$$

Wir entfernen die Bedingung auf Ereignis E, indem wir mit $\Pr[E]$ multiplizieren.

$\square$

Matroide – Definition

Algorithmus und Analyse können direkt auf beliebige Matroidauktionen angewendet werden.

Definition (Matroid)

Ein Tupel $M = (N, A)$ ist ein Matroid, wenn $N = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Menge von Bietern und A eine nicht-leere Familie von Teilmengen von N ist, für die gilt:

- Wenn $I \in A$ und $J \subseteq I$, dann ist auch $J \in A$, und
- wenn $I, J \in A$ und $|J| < |I|$, dann gibt es ein $i \in I \setminus J$ mit $J \cup \{i\} \in A$.

Notation

- Eine Menge $I \in A$ heißt unabhängig.
- Eine maximale unabhängige Menge $B \in A$ heißt Basis.
- Die Kardinalität jeder Basis ist gleich und heißt Rang $rk(M)$ des Matroids. Sei $k = rk(M)$.

Matroide – Gewichte und Austauscheigenschaft

Definition (Gewichteter Matroid)

- Ein Matroid mit Gewichten $v_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in N$ heißt gewichtet.
- Das Gewicht einer unabhängigen Menge I ist $v(I) = \sum_{i \in I} v_i$.
- Eine optimale Basis ist eine Basis mit maximalem Gewicht.

Greedy-Algorithmus von Kruskal: Berechnet optimale Basis mit maximalem Gesamtgewicht

Austauscheigenschaft: Sei B Basis und B^* optimale Basis. Es gibt eine Folge von Paaren $(b_1, b_1^*), \ldots, (b_k, b_k^*) \in B \times B^*$, so dass für $1 \leq i \leq k$

- $B_i = (B \cup \{b_1^*, \ldots, b_i^*\}) \setminus \{b_1, \ldots, b_i\}$ ist eine Basis
- $B^* = B_k$
- $v(B_i) \geq v(B_{i-1})$

Gibt es einen konstant-kompetitiven Algorithmus?

Satz (Babaioff, Immorlica, Kleinberg 2007)

Random-Threshold ist anreizkompatibel und $O(\log k)$-kompetitiv für beliebige Matroidauktionen.

Matroid-Sekretär Vermutung

Für jeden Matroid gibt es einen Algorithmus, der im Random-Order Modell ...

Schwach: ... konstant-kompetitiv ist.

Stark: ... e-kompetitiv ist.

Die Vermutung wurde in den letzten zehn Jahren für viele Klassen von Matroiden bewiesen. Für den allgemeinen Fall ist sie allerdings weiterhin offen. Die momentan besten Algorithmen lieferten Lachish (2014) und Feldman, Svensson und Zenklusen (2018). Sie erreichen einen Wettbewerbsfaktor von $O(\log \log k)$. Diese Algorithmen ergeben allerdings nicht unbedingt anreizkompatible Mechanismen.

Für graphische Matroide beweisen wir hier die schwache Vermutung.

Konstant-Kompetitiver Mechanismus für die Waldauktion

Parallele Sekretäre

1. Fixiere beliebige Reihenfolge $k_1, k_2, k_3, \ldots$ der *Knoten des Graphen*
2. Wähle $X \in \{0, 1\}$ uniform zufällig
3. **if** $X = 1$ **then** orientiere jede Kante $e \in E$ zum Knoten mit kleinerem Index
4. **else** orientiere jede Kante zum Knoten mit größerem Index
5. Für jeden Knoten k_i parallel:
   Führe den Sekretär-Algorithmus aus auf den eingehenden Kanten und wähle damit maximal eine eingehende Kante von k_i aus. Setze Zahlungen wie im Sekretär-Mechanismus für die Ein-Gut-Auktion.

Satz (Korula, Pal 2009)

Parallele-Sekretäre ist anreizkompatibel und $2e$-kompetitiv für Waldauktionen.

Beweis

Beweis:
Anreizkompatibilität folgt wie beim Sekretär-Mechanismus (Übung).

Wir betrachten hier den Wettbewerbsfaktor.

- Durch Orientierung wird die (direkte oder inverse) Sortierung der Knoten zu einer topologischen Sortierung. G wird also in jedem Fall zu einem gerichteten, azyklischen Graphen. Wenn jeder Knoten eine beliebige eingehende Kante wählt, bleibt S in jedem Fall kreisfrei.
- Wir müssen also nur noch $\mathbb{E}[v(S)]$ beschränken.
- Sei G_X der gerichtete Graph für $X \in \{0, 1\}$.
- Sei $h_X(k_i)$ eine eingehende Kante mit höchstem Wert von k_i in G_X
- Sei $S_X = \{h_X(k_i) \mid k_i \in K\}$, und S^* ein optimaler Wald in G.

Proposition

$$v(S^*) \quad \leq \quad \sum_{k_i \in K} v_{h_0(k_i)} + v_{h_1(k_i)} \quad = \quad v(S_0) + v(S_1) \;\; .$$

Beweis

Bedingt auf die Wahl von X liefert der Algorithmus für Knoten k_i im Erwartungswert mindestens $1/e$ des höchsten Wertes einer eingehenden Kante von k_i. Daher ergibt sich sowohl für $x = 0$ als auch $x = 1$

$$\mathbb{E}[v(S) \mid X = x] \quad \geq \quad 1/e \cdot v(S_x) \ .$$

Mit der Proposition erkennen wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[v(S)] &= \frac{1}{2} \cdot (\mathbb{E}[v(S) \mid X = 0] + \mathbb{E}[v(S) \mid X = 1]) \\
&\geq \frac{1}{2e} \cdot (v(S_0) + v(S_1)) \\
&\geq \frac{1}{2e} \cdot v(S^*) \ .
\end{aligned}$$

□

Verteilungsmodell

Hier wird nun der private Wert v_i für jeden Bieter i unabhängig aus einer bekannten Verteilung $\mathcal{V}_i$ mit nicht-negativen Werten und endlichem Erwartungswert gezogen.

Verteilungsmodell

- Werte der Bieter und Ankunftsreihenfolge sind unbekannt
- Anzahl n der Bieter ist bekannt
- Wert v_i wird unabhängig gezogen aus bekannter Verteilung $\mathcal{V}_i$ für Bieter i

Wir betrachten zuerst die Ein-Gut-Auktion und wollen sozialen Nutzen maximieren. Später betrachten wir auch noch Ertragsmaximierung.

Prophet

1. $p_i(v) \leftarrow 0$ für alle Bieter $i \in N$
2. $\tau \leftarrow \mathbb{E}_{x_j \sim \mathcal{V}_j}[\max_j x_j]/2 = \mathbb{E}[v_{\max}]/2$
3. In Runde $i = 1, 2, \ldots, n$:
4.   **if** $v_{a_i} \geq \tau$ und Gut noch verfügbar **then**
5.   Gib Bieter a_i das Gut und setze $p_{a_i}(v) \leftarrow \tau$.

Prophetische 2-Approximation

Satz (Krengel, Sucheston 1978)

Der Prophet Mechanismus ist anreizkompatibel und 2-kompetitiv für die Ein-Gut-Auktion im Verteilungsmodell.

Beweis:
Anreizkompatibilität folgt wieder sehr ähnlich wie beim Sekretär-Mechanismus (Übung). Wir beschränken den Wettbewerbsfaktor.

Der Algorithmus vergibt das Gut in der ersten Runde i^*, in der ein Bieter mit Wert $v_{a_{i^*}} \geq \tau$ erscheint. Wenn kein solcher Bieter kommt, vergibt er das Gut gar nicht, dann sei $v_{a_{i^*}} = 0$.
Wir werden zeigen, dass im Erwartungswert $\mathbb{E}[v_{a_{i^*}}] \geq \tau$. Da alle Werte aus Verteilungen gezogen werden, ist auch das Optimum $v_{\max}$ eine Zufallsvariable. Wir werden also zeigen:

$$\mathbb{E}[v_{a_{i^*}}] \geq \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}_{x_j \sim \mathcal{V}_j}[\max_j x_j] = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}[v_{\max}].$$

Analyse

- Sei $q(x) = \Pr[v_{\max} \geq x]$ die W.keit, dass mindestens ein Bieter einen Wert mindestens x hat.
- Wenn niemand Wert mindestens τ hat, dann wird das Gut in allen Runden nicht vergeben. Das passiert mit W.keit $(1 - q(\tau))$.
- Für jeden Bieter a_i gilt also: Mit W.keit mindestens $(1 - q(\tau))$ ist das Gut in Runde i noch verfügbar.
- Mit W.keit $q_i(x) = \Pr[v_{a_i} > x]$ hat Bieter a_i einen Wert $v_{a_i} > x \geq \tau$. Dann gibt der Algorithmus das Gut an a_i.
- Betrachte das Ereignis $E_i(x)$, dass (1) der Algorithmus das Gut an a_i gibt und (2) dessen Wert $v_{a_i} > x$ ist. Es gilt

$$\Pr[E_i(x)] \quad \geq \quad (1 - q(\tau)) \cdot q_i(x)$$

.

Analyse

- Für jedes $x \geq \tau$ kann das Gut nur an maximal einen der Bieter mit Wert mindestens x vergeben werden. Daher kann nur maximal eines der Ereignisse $E_i(x)$ eintreten und es gilt:

$$\Pr[v_{a_{i^*}} > x] \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \Pr[E_i(x)] \quad \geq \quad (1 - q(\tau)) \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i(x) \ .$$

- Es können durchaus mehrere Bieter gleichzeitig Wert mindestens x haben. Also gilt für die W.keit, dass mindestens einer Wert mindestens $x \geq \tau$ hat: (Union Bound)

$$\Pr[v_{\max} > x] \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} q_i(x) \ ,$$

Also gilt für $x \geq \tau$ eine Beziehung zwischen Algorithmus und Optimum:

$$\Pr[v_{a_{i^*}} > x] \quad \geq \quad (1 - q(\tau)) \cdot \Pr[v_{\max} > x] \ .$$

Analyse

- Für die Erwartungswerte nutzen wir die Integral-Definition für Verteilungen über nicht-negative Werte:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[v_{a_{i^*}}] &= \int_{x=0}^{\infty} \Pr[v_{a_{i^*}} > x]\, dx \\
&= q(\tau) \cdot \tau + \int_{x=\tau}^{\infty} \Pr[v_{a_{i^*}} > x]\, dx \\
&\geq q(\tau) \cdot \tau + (1 - q(\tau)) \int_{x=\tau}^{\infty} \Pr[v_{\max} > x]\, dx \\
&= q(\tau) \cdot \tau + (1 - q(\tau)) \left(\mathbb{E}[v_{\max}] - \int_{x=0}^{\tau} \Pr[v_{\max} > x]\, dx \right) \\
&\geq q(\tau) \cdot \tau + (1 - q(\tau)) \left(\mathbb{E}[v_{\max}] - \tau \right)
\end{aligned}$$

- Hier wird die natürliche Abwägung deutlich: Je höher τ, desto mehr Wert erreichen wir bei Vergabe des Gutes, aber desto kleiner ist die W.keit $q(\tau)$, dass überhaupt jemand existiert, der Wert mind. τ für das Gut hat.
- Für $\tau = \mathbb{E}[v_{\max}]/2$ fallen die $q(\tau)$-Terme weg, und wir erhalten $\mathbb{E}[v_{a_{i^*}}] \geq 1/2 \cdot \mathbb{E}[v_{\max}]$ wie gewünscht. $\square$

Propheten

Die Ungleichung

$$\mathbb{E}[v_{a_{i^*}}] \quad \geq \quad \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}[v_{\max}]$$

heißt prophetische Ungleichung (prophet inequality), da sie den Wert gegenüber einem optimalen Propheten abschätzt, der die genaue Eingabe kennt.

Wenn wir den Algorithmus auf **virtuelle Werte** anwenden anstatt auf die originalen Werte, erhalten wir damit eine prophetische Ungleichung für den **erwarteten virtuellen Nutzen**. Damit erhalten wir eine 2-Approximation des **erwarteten Ertrags der ertragsoptimalen anreizkompatiblen (Offline-)Auktion**.

Ertragsmaximierung

Ertragsprophet

1. $p_i(v) \leftarrow 0$ für alle $i \in N$
2. Wir schreiben $(x)^+ = \max(0, x)$
3. Setze $\tau \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}_{v \sim \mathcal{V}}[\max_i(\varphi_i(v_i))^+]$
4. In Runde $i = 1, 2, \ldots, n$:
5.   **if** $\varphi_{a_i}(v_{a_i}) \geq \tau$ und Gut noch verfügbar **then**
6.   Gib a_i das Gut und setze $p_{a_i}(v) \leftarrow \varphi_{a_i}^{-1}(\tau)$.

Satz

Ertragsprophet ist anreizkompatibel für reguläre Verteilungen und 2-kompetitiv bzgl. der ertragsoptimalen Ein-Gut-Auktion.

Beweis:
Anreizkompatibilität folgt wie oben, da für reguläre Verteilungen $\varphi_i(v_i)$ monoton steigend in v_i ist. Die Analyse des Faktors oben kann mit minimalen Änderungen genauso für virtuelle Werte und virtuellen sozialen Nutzen durchgeführt werden.

Ertragsmaximierung

Daraus folgt also, dass

$$\mathbb{E}[\varphi_{a_{i^*}}(v_{a_{i^*}})] \quad \geq \quad \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}[\max_i(\varphi_i(v_i))^+] \ .$$

Beachte: $\mathbb{E}[\max_i(\varphi_i(v_i))^+]$ ist der virtuelle Wert, den man erzielt wenn das Gut immer dem Bieter mit höchstem nicht-negativem virtuellen Wert gegeben wird. Dies ist also der **virtuelle Wert der ertragsoptimalen (Offline-)Auktion**. Erwartete Zahlungen sind erwarteter virtueller Wert, also gilt

$$\mathbb{E}\left[p_{a_i^*}(v)\right] \quad \geq \quad \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}\left[\sum_i p_i^*(v)\right] \ ,$$

wobei p_i^* Zahlungen der ertragsoptimalen (Offline-)Auktion sind. □

Man bekommt auch für die **Ertragsmaximierung im Offline-Fall** einen **einfachen anreizkompatiblen Mechanismus**: Berechne τ und biete den Bietern das Gut nacheinander in beliebiger Reihenfolge zum Preis τ zum Kauf an, solange bis einer das Gut kauft. Damit erzielen wir **mindestens die Hälfte des Ertrags** jeder anderen anreizkompatiblen Auktion.

Matroidauktionen

Wir können das Szenario nun kanonisch auf Matroidauktionen erweitern:

- Bekannt: Menge N von Bietern, Ergebnismenge A, Matroid $M = (N, A)$
- Bieter $i \in N$ hat unbekannten privaten Wert $v_i \sim \mathcal{V}_i$, Verteilung $\mathcal{V}_i$ bekannt
- Bieter kommen in unbekannter Ordnung an. Online-Mechanismus entscheidet unmittelbar: auswählen/ablehnen und Zahlungen. Entscheidungen sind endgültig
- Ziel: Erstelle eine unabhängige Menge $S \in A$ mit maximalem Gesamtwert. Mechanismus soll anreizkompatibel sein.

Wir analysieren hier eine Klasse von Mechanismen, die – anstatt einer globalen Schranke τ – deterministische Schranken τ_i für jeden Bieter $i \in N$ setzen. Sei $\tau_i = \infty$ wenn $S \cup \{i\} \notin A$. Der Algorithmus akzeptiert einen Bieter genau dann wenn $v_i \geq \tau_i$. In diesem Fall zahlt Bieter i dann τ_i.

Für so einen Ansatz brauchen wir eine sorgfältige Ausgestaltung der τ_i. Insbesondere möchten wir, dass die Schranken dazu führen, dass (1) nicht zu viele Bieter mit kleinem Wert ausgewählt und (2) nicht zu viele wertvolle Bieter abgelehnt werden. Die Idee der α-balancierten Schranken formalisiert diese Bedingungen.

α-balancierte Schranken

- Für jeden Bieter $i \in N$, sei v_i der private Wert und v'_i ein beliebiger gesampleter Wert. Beide werden unabhängig aus $\mathcal{V}_i$ gezogen.
- Die Eingabefolge sei $\sigma = (a_1, v_{a_1}), \ldots, (a_n, v_{a_n})$. In der nachfolgenden Definition der Schranken unten fixieren wir die Folge (und damit alle v_i's) und fordern eine Bedingung für jede solche Folge.
- Ausgewählte Menge von Bietern nennen wir $S = S(\sigma)$.
- Optimale Basis für die gesampleten Werte v' sei B'.
- Mit der Austauscheigenschaft gibt es mindestens eine Aufteilung von B' in B_c and B_r so dass $S \cup B_r$ eine Basis von M darstellt.
- Von allen solchen Aufteilungen sei $(B_c(S), B_r(S))$ diejenige, die den gesampleten Gesamtwert $v'(B_r(S))$ maximiert.

Definition

Definition

Sei $\alpha > 0$. Der Mechanismus hat α-balancierte Schranken wenn für jede Eingabefolge σ und X disjunkt von $S = S(\sigma)$ mit $S \cup X \in A$ gilt, dass die deterministischen Schranken $\tau_i = \tau_i(\sigma)$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$\sum_{i \in S} \tau_i \geq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \mathbb{E}_{v' \sim \mathcal{V}}[v'(B_c(S))] \tag{1}$$

$$\sum_{i \in X} \tau_i \leq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \mathbb{E}_{v' \sim \mathcal{V}}[v'(B_r(S))] \ . \tag{2}$$

Proposition

Wenn der Mechanismus α-balancierte Schranken hat, dann ist er anreizkompatibel und α-kompetitiv für Matroidauktionen.

Mechanismus für die Matroidauktion

Expected-Margin-Thresholds

1. $p_i(v) \leftarrow 0$ für alle $i \in N$, $S \leftarrow \emptyset$
2. In Runde $i = 1, 2, \ldots n$:
3. **if** $(S \cup \{a_i\}) \notin A$ **then** $\tau_i \leftarrow \infty$; **else**

$$\tau_i \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}_{v' \sim \mathcal{V}}[v'(B_r(S)) - v'(B_r(S) \cup \{a_i\})] \ ,$$

   wobei alle $v'_i \sim \mathcal{V}_i$ unabhängig gezogen.

4. **if** $v_{a_i} \geq \tau_i$ **then** $S \leftarrow S \cup \{a_i\}$ und $p_{a_i}(v) \leftarrow \tau_i$

Satz (Kleinberg, Weinberg 2012)

Expected-Margin-Thresholds hat 2-balancierte Schranken, ist anreizkompatibel und 2-kompetitiv für Matroidauktionen.

Diskussion

- Das Verteilungsmodell erscheint “netter” als das Random-Order Modell: Es erlaubt bessere Faktoren in der Ein-Gut-Auktion (2 vs. e).
- Für Matroidauktionen ist die Verbesserung drastisch (2 vs. $o(1)$). Hier hängt die abschließende Bewertung aber auch von der Lösung der Matroid-Sekretär Vermutung ab.
- Für eine Reihe von weiteren Packungsproblemen hat man in den letzten Jahren Algorithmen im Random-Order und im Verteilungsmodell erforscht.
- So existieren mittlerweile Ansätze für Online-Varianten von Rucksack, Matching, Independent Set, Packungs-Integer-Programs und weiteren wichtigen Problemstellungen.
- Die Garantien für Algorithmen in stochastischen Online-Modellen sind aber oftmals nur ansatzweise verstanden und weiterhin ein interessantes Gebiet aktueller Forschung.

Literatur

- M. Babaioff, N. Immorlica, R. Kleinberg. Matroids, Secretary Problems, and Online Mechanisms. SODA 2007.
- N. Korula, M. Pal. Algorithms for Secretary Problems on Graphs and Hypergraphs. ICALP 2009.
- O. Lachish. $O(\log\log \text{rank})$-Competitive Ratio for the Matroid Secretary Problem. FOCS 2014.
- M. Feldman, O. Svensson, R. Zenklusen. A Simple $O(\log\log \text{rank})$-Competitive Algorithm for the Matroid Secretary Problem. Math. Oper. Res. 43(2):638-650, 2018.
- P. Freeman. The Secretary Problem and its Extensions: A Review. Intl. Stat. Rev. 51(2):189-206, 1983.
- R. Kleinberg, M. Weinberg. Matroid Prophet Inequalities. STOC 2012.
- U. Krengel, L. Sucheston. On semiamarts, amarts, and processes with finite value. Adv. in Prob. Related Topics 4:197-266, 1978.