

# Braess-Paradoxon und der Preis der Anarchie

Algorithmische Spieltheorie

Sommer 2018

## Wardropspiele

Braess-Paradoxon und der Preis der Anarchie

Existenz und Eindeutigkeit von Wardrop-Gleichgewichten

# Verkehrsmodell von Wardrop

Ein **Wardropspiel** ist gegeben durch

- ▶ einen gerichteten Graphen  $G = (V, E)$
- ▶  $k$  Arten von Verkehr (genannt “Commodities”) mit Quelle-Senke-Paar  $(s_i, t_i)$  und Aufkommen (genannt “Rate”)  $r_i$ , für  $i \in [k] = \{1, \dots, k\}$
- ▶ Latenzfunktionen  $d_e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , für  $e \in E$
- ▶ Commodity  $i$  besteht aus unendlich vielen, infinitesimal kleinen Spielern mit Gesamtmasse  $r_i$ .

Wardropspiele dienen als Modell für Systeme mit einer Vielzahl von Nutzern, in denen der Einfluß eines einzelnen Akteurs sehr gering ist (z.B. riesige Verkehrs- oder Computernetzwerke).

# Wardropspiele mit einer Commodity

Vereinfachende Annahmen:

- ▶ Latenzfunktionen sind nicht-negativ, nicht-fallend und konvex.
- ▶ Wir betrachten Spiele mit **einer Commodity**, Quelle  $s$  und Senke  $t$ .
- ▶ Rate normalisiert auf  $r_1 = 1$ .

Flüsse und Latenzen im Wardropspiel:

- ▶ Sei  $\mathcal{P}$  die Menge von Pfaden  $P$  von  $s$  nach  $t$ .
- ▶ Ein **Fluß** liefert einen Flußwert  $f_P \in [0, 1]$ , für jeden  $P \in \mathcal{P}$ , mit  $\sum_{P \in \mathcal{P}} f_P = 1$ .
- ▶ Der **Kantenfluß** auf  $e \in E$  ist  $f_e = \sum_{P \ni e} f_P$ .
- ▶ Die **Latenz auf Kante**  $e \in E$  bei Fluß  $f$  ist  $d_e(f_e)$ .
- ▶ Die **Latenz auf Pfad**  $P \in \mathcal{P}$  bei Fluß  $f$  ist  $d_P(f) = \sum_{e \in P} d_e(f_e)$ .

# Wardrop-Gleichgewicht

## Definition (Wardrop-Gleichgewicht)

Ein Fluß  $f$  ist ein **Wardrop-Gleichgewicht** wenn für jedes Paar von Pfaden  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$  mit  $f_{P_1} > 0$  gilt  $d_{P_1}(f) \leq d_{P_2}(f)$ .

Beobachtungen:

- ▶ Im Wardrop-Gleichgewicht werden nur Flusswerte angegeben, aber kein expliziter  $s$ - $t$ -Pfad für jeden der unendlich vielen einzelnen Spieler.
- ▶ Wenn wir die Spieler gemäß der Flusswerte auf Pfade verteilen, bekommt jeder Spieler einen Pfad mit momentan optimalen Kosten.
- ▶ Im Wardrop-Gleichgewicht könnte es aber **auch endlich viele Spieler** geben, die suboptimale Pfade wählen. Da diese infinitesimal klein sind, fallen sie bei der Flußbedingung nicht ins Gewicht.

Wardropspiele

Braess-Paradoxon und der Preis der Anarchie

Existenz und Eindeutigkeit von Wardrop-Gleichgewichten

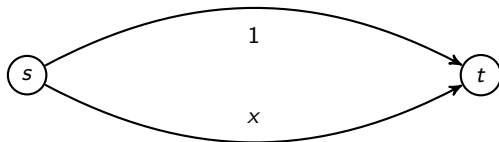
# Soziale Kosten

Wir betrachten soziale Kosten als die durchschnittliche Latenz aller Pfade.

## Definition (Soziale Kosten)

Die **sozialen Kosten** eines Flusses  $f$  sind das gewichtete Mittel der Spieler/Pfadlängen

$$C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} d_P(f) \cdot f_P = \sum_{e \in E} d_e(f_e) f_e .$$



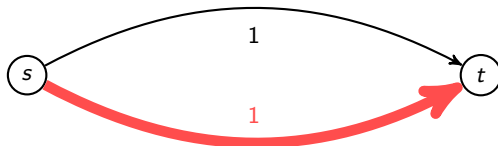
# Soziale Kosten

Wir betrachten soziale Kosten als die durchschnittliche Latenz aller Pfade.

## Definition (Soziale Kosten)

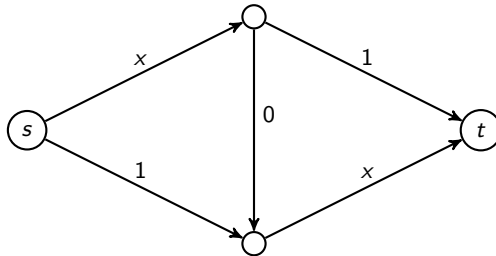
Die **sozialen Kosten** eines Flusses  $f$  sind das gewichtete Mittel der Spieler/Pfadlängen

$$C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} d_P(f) \cdot f_P = \sum_{e \in E} d_e(f_e) f_e .$$

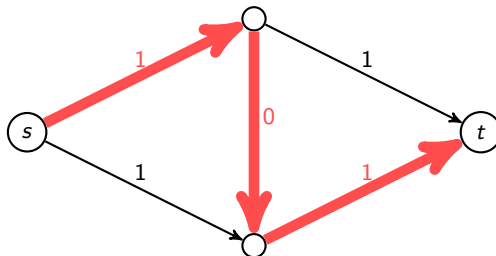




## Wardropspiele – Beispiel

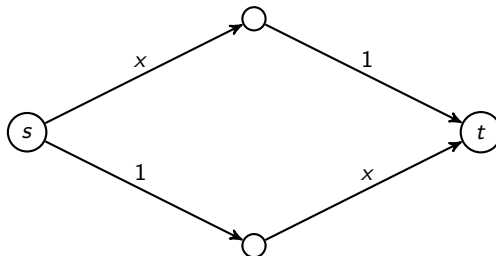


# Wardropspiele – Beispiel



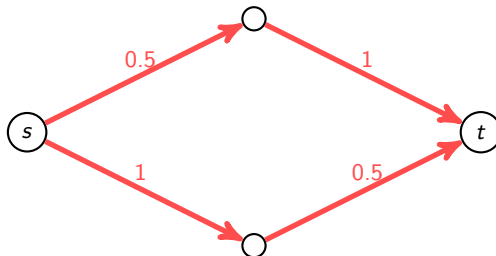
Soziale Kosten: 2

# Wardropspiele – Beispiel



Soziale Kosten: 2

## Wardropspiele – Beispiel



Soziale Kosten: 2

Soziale Kosten: 1.5

**Braess Paradoxon:** Zerstören einer schnellen Verbindung **verbessert** die Kosten im Gleichgewicht **für jeden einzelnen Spieler**.

# Der Preis der Anarchie

Wie gut sind die sozialen Kosten in einem Wardrop-Gleichgewicht?

Welche Parameter des Spiels haben Einfluß auf die sozialen Kosten?

$$\text{Preis der Anarchie} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Soziale Kosten des schlechtesten Gleichgewichts}}{\text{Optimale soziale Kosten}}$$

$$\text{Preis der Stabilität} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Soziale Kosten des besten Gleichgewichts}}{\text{Optimale soziale Kosten}}$$

Satz (Roughgarden, Tardos, 2002)

*Der Preis der Anarchie in Wardropspielen mit affin-linearen Latenzfunktionen ist höchstens  $4/3$ .*

## Preis der Anarchie – Beweis

(Correa, Schulz, Stier-Moses, 2008)

Sei  $f$  ein Fluß im Gleichgewicht. Sei  $g$  ein beliebiger Fluß.

$$\begin{aligned} C(f) &= \sum_{P \in \mathcal{P}} f_P d_P(f) \\ &\leq \sum_{P \in \mathcal{P}} g_P d_P(f) \\ &= \sum_{e \in E} g_e d_e(f_e) \\ &= \sum_{e \in E} g_e (d_e(g_e) + d_e(f_e) - d_e(g_e)) \\ &= C(g) + \sum_{e \in E} g_e (d_e(f_e) - d_e(g_e)) . \end{aligned}$$

## Preis der Anarchie – Beweis

(Correa, Schulz, Stier-Moses, 2008)

## Lemma

Für jede Kante  $e \in E$ ,

$$g_e (d_e(f_e) - d_e(g_e)) \leq \frac{1}{4} f_e d_e(f_e) .$$

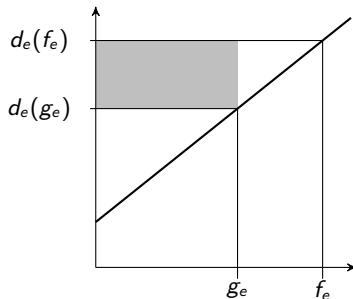
**Beweis:**

Das Lemma gilt offensichtlich wenn  $f_e < g_e$ , da in diesem Fall  $d_e(f_e) \leq d_e(g_e)$ .  
Damit ist die linke Seite der Gleichung höchstens 0.

## Preis der Anarchie – Beweis

(Correa, Schulz, Stier-Moses, 2008)

Sei nun  $f_e \geq g_e$  wie im folgenden Bild der Funktion  $d_e$ .



Durch Vergleich der Gebiete in der Zeichnung sehen wir

$$g_e (d_e(f_e) - d_e(g_e)) \leq \frac{1}{4} f_e d_e(f_e) .$$

Damit ist das Lemma gezeigt. □



## Preis der Anarchie – Beweis

(Correa, Schulz, Stier-Moses, 2008)

Anwendung des Lemmas ergibt

$$\begin{aligned} C(f) &= C(g) + \sum_{e \in E} g_e (d_e(f) - d_e(g)) \\ &\leq C(g) + \frac{1}{4} \sum_{e \in E} f_e d_e(f) \\ &= C(g) + \frac{1}{4} C(f) . \end{aligned}$$

Daher gilt  $\frac{3}{4} C(f) \leq C(g)$  für jeden Fluß  $g$ . Der Satz ist gezeigt.  $\square$

### Theorem (Roughgarden, Tardos, 2002)

*In Wardropspielen, in denen die Latenzfunktionen positive Polynome vom Grad  $d$  sind, ist der Preis der Anarchie höchstens  $d + 1$ .*

Wardropspiele

Braess-Paradoxon und der Preis der Anarchie

Existenz und Eindeutigkeit von Wardrop-Gleichgewichten

# Existenz und Eindeutigkeit

## Satz (Beckmann, McGuire, Winsten, 1956)

*In jedem Wardropspiel mit stetigen Latenzfunktionen gibt es mindestens ein Wardrop-Gleichgewicht. Für stetige, streng monoton steigende Funktionen sind die Kantenflüsse im Gleichgewicht eindeutig.*

### Beweisidee:

Das Wardropspiel hat eine **Potenzialfunktion**

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_{x=0}^{f_e} d_e(x) dx .$$

Wir betrachten einen Fluß, der das Potenzial minimiert, und formulieren dies als Optimierungsproblem:

## Existenz und Eindeutigkeit

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimiere} && \sum_{e \in E} \int_{x=0}^{f_e} d_e(x) dx \\
 &\text{so dass} && f_e = \sum_{P \in \mathcal{P}} f_P \quad \text{für jedes } e \in E \\
 &&& \sum_{P \in \mathcal{P}} f_P = 1 \\
 &&& f_P \geq 0 \quad \text{für jedes } P \in \mathcal{P}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Jede Latenzfunktion  $d_e$  ist stetig. Daher ist

$$D_e(f_e) = \int_{x=0}^{f_e} d_e(x) dx$$

stetig differenzierbar. Somit existiert eine optimale Lösung des Problems.

# Existenz und Eindeutigkeit

Mit  $f_e = \sum_{P \in \mathcal{P}} f_P$  gilt für die Ableitung

$$\frac{d}{df_P} \sum_{e \in E} \int_{x=0}^{f_e} d_e(x) dx = \sum_{e \in P} d_e(f) = d_P(f_P) .$$

Die Rate 1 muss optimal auf die Pfade verteilt werden. Wir verringern  $\Phi(f)$ , indem wir  $f_P$  mit hoher Ableitung verringern und dafür  $f_{P'}$  mit kleiner Ableitung erhöhen. Im Optimum kann also kein Fluß von Pfaden mit höherer Latenz auf Pfade mit kleinerer Latenz verschoben werden.

Daher gilt in der optimalen Lösung für jeden Pfad  $P$  mit  $f_P > 0$  und jeden beliebigen Pfad  $P'$ , dass  $d_P(f) \leq d_{P'}(f)$ . Die optimale Lösung ist also ein Wardrop-Gleichgewicht.

# Existenz und Eindeutigkeit

Wenn  $d_e$  streng monoton steigend in  $f_e$  ist, gilt das auch für  $d_P$  in  $f_P$ . Dann ist  $\Phi(f)$  streng konvex in  $f_P$ . Wenn  $\Phi(f)$  streng konvex ist, dann ist die optimale Lösung für die  $f_e$  eindeutig.  $\square$

Anmerkungen:

- ▶ Eindeutige Kantenflüsse  $\Rightarrow$  **Eindeutige soziale Kosten** im Gleichgewicht. Daher gilt in diesen Spielen: Preis der Anarchie = Preis der Stabilität.
- ▶ Eindeutigkeit gilt **nicht** für die Aufteilung in Pfadflüsse  $f_P$ .
- ▶ Problem (1) kann mit dem Ellipsoidverfahren für konvexe Minimierungsprobleme in **polynomieller Zeit** gelöst werden (approximativ bzgl. einer vorher bestimmten numerischen Genauigkeit).

## Korollar

*Ein Wardrop-Gleichgewicht kann in polynomieller Zeit berechnet werden.*

# Literatur

- ▶ M. Beckmann, B. McGuire, C. Winsten. *Studies in the Economies of Transportation*. Yale University Press, 1956.
- ▶ D. Braess. Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung* 12:258–268, 1968.
- ▶ J. Correa, A. Schulz, N. Stier Moses, A Geometric Approach to the Price of Anarchy in Nonatomic Congestion Games. *Games and Economic Behavior* 64(2):457–469, 2008.
- ▶ N. Nisan, É. Tardos, T. Roughgarden, V. Vazirani. *Algorithmic Game Theory*, 2007 (Kapitel 18).
- ▶ T. Roughgarden, É. Tardos. How Bad is Selfish Routing? *Journal of the ACM* 49(2): 236–259, 2002.