Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2018

Prof. Dr. Martin Hoefer, Paresh Nakhe

JOHANN WOLFGANG GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Algorithmen und Komplexität
Institut für Informatik

Übung 2

Ausgabe: 17.04.2018
Abgabe: 24.04.2018

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und **tackere** *diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!*

Aufgabe 2.1. (3+3+2 Punkte)

Eine Strategie $s_i \in S_i$ für Spieler i ist **strikt dominiert** durch Strategie $s_i' \in S_i$, wenn s_i' für Spieler i immer strikt besser ist als s_i – also wenn für jedes Strategieprofil s_{-i} gilt

$$c_i(s_i', s_{-i}) < c_i(s_i, s_{-i}).$$

	W	X	Y	Z
A	2 3	6 4	3 1	9 6
B	3 2	2 3	6 5	8 1
C	1 3	2 1	5 5	4 2
D	7 4	4 5	2 3	5 2

(1) Eliminiere strikt dominierte Strategien in der gegebenen Kostenmatrix iterativ (eine nach der anderen). Reduziere damit die Strategiemengen der Spieler bis es keine strikt dominierte Strategie mehr gibt. Gib jeden Zwischenschritt an.

(2) Berechne ein gemischtes Nash-Gleichgewicht von der in (1) übrig gebliebenen, reduzierten Kostenmatrix.

(3) Zeige, dass das in (2) berechnete Nash-Gleichgewicht das einzige gemischte Nash-Gleichgewicht ist, sogar für das Originalspiel mit allen acht Strategien.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.2. (1 + 3 + 2 Punkte)

Betrachte ein Quadrat S, das durch ein Grid von Linien parallel zu seinen Seiten in kleine Quadrate unterteilt ist. Ähnlich wie beim Spernerschen Lemma färben wir die Eckpunkte der Unterteilung, diesmal allerdings mit *vier* Farben nach folgenden Regeln:

(a) Die vier Außenecken von S sind im Uhrzeigersinn gefärbt mit den Farben rot, blau, orange, lila.

(b) Wenn ein Eckpunkt auf einem Außenrand von S liegt, muss er mit einer der Farben der Endpunkte des jeweiligen Außenrandes gefärbt werden.

(c) Eckpunkte, die im Inneren von S liegen, können beliebig mit einer der vier Farben gefärbt sein.

Wir nennen die Kanten zwischen roten und blauen Eckpunkten die *Türen*. Türen auf dem Außenrand von S heißen *Eingänge*. Zeige die folgenden Aussagen:

(1) Es gibt immer eine ungerade Anzahl von Eingängen.

(2) Es gibt mindestens ein kleines Quadrat mit mindestens drei verschiedenen Farben.

(3) Es gibt immer eine ungerade Anzahl an kleinen Quadraten, die mindestens drei verschiedene Farben und genau eine Tür haben.

Hinweis: Angenommen, es existieren zwei kleine Quadrate dieser Art. Dann argumentiere, dass es auch ein drittes kleines Quadrat dieser Art geben muss.

Aufgabe 2.3. *Mix-und-Match* (2+3 Punkte)

Seien (x^1, y^1) und (x^2, y^2) zwei gemischte Nash-Gleichgewichte in einem 2-Spieler Nullsummenspiel.

a) Sind auch (x^1, y^2) und (x^2, y^1) gemischte Nash-Gleichgewichte? Begründe Deine Antwort.

b) Betrachte den Zustand (x', y') mit

$$\begin{aligned} x'_j &= (x^1_j + x^2_j)/2 \qquad \text{für alle } j \in S_1 \\ y'_j &= (y^1_j + y^2_j)/2 \qquad \text{für alle } j \in S_2 \ . \end{aligned}$$

Zeige, dass (x', y') ein Nash-Gleichgewicht ist.

Hinweis: Benutze das Minimax Theorem.

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
`http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/agt/sommer18/agt18.shtml`

Email: `mhoefer@cs.uni-frankfurt.de, Nakhe@em.uni-frankfurt.de`