Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2018

Prof. Dr. Martin Hoefer, Paresh Nakhe

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Algorithmen und Komplexität
Institut für Informatik

Übung 3

Ausgabe: 24.04.2018
Abgabe: 08.05.2018

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und ***tackere*** *diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!*

Aufgabe 3.1. *Nullsummenspiele* (2+2+4 Punkte)

Betrachte ein beliebiges Nullsummenspiel mit 2 Spielern, repräsentiert durch die Gewinnmatrix $A \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$. Wir bezeichnen den Wert des Spiels mit $v(A)$.

a) Sei $c > 0$ eine beliebige Konstante. Zeige: Wenn jeder Eintrag der Matrix mit c multipliziert wird, dann ist der Wert des neuen Spiels $c \cdot v(A)$.

b) Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Zeige: Wenn in jedem Eintrag der Matrix c dazuaddiert wird, dann ist der Wert des neuen Spiels $c + v(A)$.

c) Sei $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ die Gewinnmatrix eines weiteren Nullsummenspiels. Wir bezeichnen den Wert des Spiels mit $v(B)$. Beweise or widerlege:

$$v(A + B) \;=\; v(A) + v(B).$$

Aufgabe 3.2. *Symmetrische Nullsummenspiele* (3 Punkte)

Ein Nullsummenspiel mit zwei Spielern ist *symmetrisch* wenn beide Spieler k reine Strategien haben und für die Gewinnmatrix $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ gilt $a_{ij} = -a_{ji}$ für jedes Paar von Strategien $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Zeige: Für den Wert eines solchen Spiels gilt $v(A) = 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.3. *Potenzialspiel* (2 + 3 + 2 Punkte)

Betrachte das folgende Spiel:

	S	G
S	a a	c d
G	d c	b b

a) Für $a = 2, b = 4, c = 1$ und $d = 5$ ergibt sich ein Gefangenendilemma. Konstruiere eine exakte Potenzialfunktion für dieses Spiel.

b) Beweise, dass für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ das resultierende Spiel ein exaktes Potenzialspiel ist.

c) Konstruiere ein 2×2-Spiel (2 Spieler, jeder 2 Strategien), so dass ein reines Nash-Gleichgewicht existiert, aber das Spiel kein exaktes Potenzialspiel ist.

Aufgabe 3.4. *Sensor-Netzwerke* (4 + 3 Punkte)

Sensoren können genutzt werden, um in großflächigen Bereichen Events zu erfassen, um z.B. bei Waldbränden Alarm zu schlagen. Die Lebensdauer eines Sensornetzwerks kann bedeutend verlängert werden, wenn Sensoren abgeschaltet werden sofern ihre Umgebung bereits gut durch andere Sensoren abgedeckt ist. Die Nachbarschaft zwischen Sensoren wird durch einen Graphen dargestellt. Ein vereinfachtes spieltheoretisches Modell für die Abwägung zwischen Betriebskosten und Abdeckung ergibt sich wie folgt.

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Betriebskosten $c > 0$. Jeder Knoten $v \in V$ sei ein Spieler mit zwei Strategien AN_v oder AUS_v. Die Kosten eines Spielers v sind gegeben durch:

$$c_v(s) = \begin{cases} |\{s_w = AUS_w \text{ und } \{v,w\} \in E\}|, & \text{wenn } s_v = AUS_v \\ c & \text{wenn } s_v = AN_v \end{cases}$$

a) Zeige, dass dieses Spiel ein exaktes Potenzialspiel ist.

b) Zeige, dass jede Verbesserungsfolge höchstens eine Länge $O(n^3)$ hat, wobei n die Anzahl der Spieler ist. Was ist die kleinste Schranke in Abhängigkeit von n, die Du zeigen kannst?

Aufgabe 3.5. *Flaschenhals-Auslastungsspiel* (5 Punkte)

Wir betrachten Auslastungsspiele $\Gamma = (\mathcal{N}, \mathcal{R}, (\sum_i)_{i\in\mathcal{N}}, (d_r)_{r\in\mathcal{R}}))$ wie in der Vorlesung. In der Flaschenhals (engl.: bottleneck) Variante optimiert jeder Spieler nicht die Summe sondern die *maximale Latenz* der gewählten Ressourcen. Formal ergeben sich für jeden Spieler $i \in \mathcal{N}$ und jeden Zustand S die individuellen Kosten $c_i(S)$ als

$$c_i(S) \;=\; \max_{r\in S_i} d_r(n_r).$$

Zeige, dass jedes Flaschenhals-Auslastungsspiel die endliche Verbesserungseigenschaft hat.

Hinweis: Lexikografisches Potenzial.

Aufgabe 3.6. *Gewichtetes Auslastungsspiel* (4 Punkte)

Wir betrachten wieder Auslastungsspiele $\Gamma = (\mathcal{N}, \mathcal{R}, (\sum_i)_{i\in\mathcal{N}}, (d_r)_{r\in\mathcal{R}}))$ wie in der Vorlesung. In *gewichteten Auslastungsspielen* hat jeder Spieler $i \in \mathcal{N}$ ein positives Gewicht $w_i > 0$. Die Latenzfunktion d_r hängt nun vom Geseamtgewicht der Spieler ab, die Ressource r auswählen. Formal ist $n_r = \sum_{r\in S_i} w_r$ das Gesamtgewicht der Spieler mit $r \in S_i$ und $d_r(n_r)$ die Latenz der Ressource. Für jeden Spieler $i \in \mathcal{N}$ und jeden Zustand S sind die individuellen Kosten $c_i(S)$ die Summe der Latenzen, also $c_i(S) = \sum_{r\in S_i} d_r(n_r)$.

Konstruiere ein gewichtetes Auslastungsspiel mit zwei Spielern und Spielergewichten $w_1 = 1$ und $w_2 = 2$, das kein reines Nash-Gleichgewicht hat.

Hinweis: Nimm an, dass $\Sigma_1 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ und $\Sigma_2 = \{\{b\}, \{a, c\}\}$ und konstruiere entsprechende Latenzfunktionen für die drei Ressourcen.

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
`http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/agt/sommer18/agt18.shtml`

Email: `mhoefer@cs.uni-frankfurt.de, Nakhe@em.uni-frankfurt.de`