Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2018

Prof. Dr. Martin Hoefer, Paresh Nakhe

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Algorithmen und Komplexität
Institut für Informatik

Übung 4

Ausgabe: 08.05.2018
Abgabe: 15.05.2018

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und ***tackere*** *diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!*

Aufgabe 4.1. *Klassen von Spielen mit reinen Gleichgewichten* (2+2+2+2 Punkte)

Spiele mit reinen Nash-Gleichgewichten können basierend auf der Allgemeinheit der zugehörigen Potenzialfunktionen klassifiziert werden. In dieser Übung konstruieren wir 3×3-Spiele (also Spiele mit **2 Spielern** und **3 Strategien** pro Spieler), um diese Eigenschaften zu demonstrieren. Entwirf eine Kostenmatrix für jedes der folgenden vier 3×3-Spiele:

a) Ein 3×3-Spiel, in dem ein exaktes Potenzial existiert.

b) Ein 3×3-Spiel, in dem ein ordinales Potenzial existiert aber kein exaktes Potenzial.

c) Ein 3×3-Spiel, das schwach kreisfrei ist, aber in dem kein ordinales Potenzial existiert.

d) Ein 3×3-Spiel, das nicht schwach kreisfrei ist, aber genau ein reines Nash-Gleichgewicht hat.

Begründe in jeder Teilaufgabe, warum das Spiel die geforderten Eigenschaften hat.

Aufgabe 4.2. *Ordinales Potenzial und endliche Verbesserungen* (1+5 Punkte)

Jedes ordinale Potenzialspiel hat die endliche Verbesserungseigenschaft: Da das Potenzial strikt sinkt in jedem Schritt, in dem sich ein Spieler strikt verbessert, kann es nur azyklische und damit endliche Folgen von Verbesserungsschritten geben. Wir betrachten hier die Umkehrung.

Sei Γ ein strategisches Spiel, in dem die endliche Verbesserungseigenschaft gilt – jede Folge von Verbesserungsschritten in Γ ist endlich. Zeige, dass

a) in Γ immer ein reines Nash-Gleichgewicht existiert, und

b) Γ ein ordinales Potenzial hat.

Aufgabe 4.3. *Stabiles Matching* (2+3+2 Punkte)

Sei $G = (X, Y, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph (nicht unbedingt vollständig). Betrachte nun Instanzen, bei denen jeder Mann $x \in X$ (jede Frau $y \in Y$) eine Präferenzliste nur über die *benachbarten* Frauen (Männer) hat. Jeder Teilnehmer ist lieber zu einem Nachbarn gematched als ungematched, und lieber ungematched als zu einem nicht-Nachbarn gematched.

a) Zeige, dass immer ein stabiles Matching existiert.

b) Zeige, dass alle stabilen Matchings die gleiche Kardinalität haben.

c) Sei k die Kardinalität eines stabilen Matchings. Zeige, dass jedes (evtl. unstabile) Matching eine Kardinalität von höchstens $2k$ hat.

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
`http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/agt/sommer18/agt18.shtml`

Email: `mhoefer@cs.uni-frankfurt.de`, `Nakhe@em.uni-frankfurt.de`