Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2018

Prof. Dr. Martin Hoefer, Paresh Nakhe

JOHANN WOLFGANG GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Algorithmen und Komplexität
Institut für Informatik

Übung 5

Ausgabe: 15.05.2018
Abgabe: 22.05.2018

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und ***tackere*** *diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!*

Aufgabe 5.1. *Regret* (3 + 2 + 2 Punkte)

Betrachte ein 2-Spieler Spiel mit folgender Kostentabelle.

	E	F	G
A	10 10	10 100	100 1
B	100 10	10 10	1 10
C	1 1	10 100	10 10

Nimm an, dass die Spieler die folgende Folge von Zuständen spielen:

$$\binom{A}{E}, \binom{B}{F}, \binom{C}{G}, \binom{A}{E}, \binom{B}{F}, \binom{C}{G} \dots$$

a) Zeige dass diese Folge die No-Regret Eigenschaft für jeden der Spieler erfüllt.

b) Konvergiert die durchschnittliche Strategie im Ablauf des Spiels zu einem gemischten Nash-Gleichgewicht? Begründe Deine Antwort.

c) Modifiziere das Spiel, so dass das Spiel die beiden Eigenschaften noch erfüllt und mindestens ein Spieler eine *strikt dominierte* Strategie spielt. Beschreibe kurz warum die Eigenschaften noch gelten.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.2. *Gegner im Expertenproblem* (2 + 2 + 2 Punkte)

Bei der Analyse von No-Regret Algorithmen haben wir ein Gegnermodell betrachtet, mit dem die Kosten der Experten, $\ell^1, \ell^2, \dots, \ell^T$ generiert werden – damit ist klar, dass die Algorithmen No-Regret Garantien liefern, selbst wenn die Kosten auf andere (nicht-gegnerische) Art zustande kommen. Beim Gegnermodell kann es allerdings Unterschiede geben, je nachdem was der Gegner weiß und wie mächtig er ist. Betrachte die folgenden Typen von Gegnern.

Typ "Unbewusst": Alle Kostenvektoren von Experten, $\ell^1, \ell^2, \dots, \ell^T$, werden vor der Beginn des ersten Zeitschritts vom Gegner generiert und danach nicht mehr verändert. Vektor ℓ^t wird nach der Expertenwahl des Algorithmus in Schritt t nur noch aufgedeckt.

Typ "Zufallsfixiert": In jedem Schritt t kennt der Gegner die Wahrscheinlichkeitsverteilung, mit der der Algorithmus einen Experten auswählt. Darauf basierend generiert der Gegner im Schritt t einen Kostenvektor ℓ^t.

Typ "Allwissend": In jedem Schritt t kennt der Gegner den Experten, den der Algorithmus (nach Ziehen aus seiner Wahrscheinlichkeitsverteilung) auswählt. Darauf basierend generiert der Gegner im Schritt t einen Kostenvektor ℓ^t.

Argumentiere für jeden dieser Gegner, ob man einen Algorithmus mit No-Regret Garantie entwerfen kann oder nicht.

Aufgabe 5.3. *Wettervorhersage* (3 + 2 + 3 Punkte)

Betrachte eine Variante des Expertenproblems mit N Experten mit Ergebnissen $\{Regen, Sonne\}$. Zu Beginn jedes Tages t sagt jeder Experte entweder *Regen* oder *Sonne* voraus. Sei S_r^t die Menge der Experten, die *Regen* an Tag t vorhersagen.

Zu Beginn jedes Tages wählt der WetterMajority Algorithmus eine Vorhersage. Experte i hat zu Beginn von Tag t ein Gewicht $w_i^{t-1} \in [0,1]$, am Anfang ist $w_i^0 = 1$ für alle Experten. Sei $W^{t-1} = \sum_{i \in N} w_i^{t-1}$ das Gesamtgewicht zu Beginn von Tag t. WetterMajority wählt nach einer gewichteten Mehrheitsregel über die Experten, d.h. zu Beginn von Tag t wählt er *Regen* genau dann wenn

$$\sum_{i \in S_r^t} w_i^{t-1} \geq W^{t-1}/2 \ .$$

Danach wird das Wetter an Tag t beobachtet. Je nachdem ob es regnet oder die Sonne scheint, wird das Gewicht jedes Experten i mit falscher Vorhersage am Ende des Tages um Faktor 1/2 reduziert.

a) Zeige: Wenn WetterMajority einen Fehler macht, dann sinkt W^t:

$$W^t \ \leq \ \frac{3}{4} \cdot W^{t-1}.$$

b) Sei f die Gesamtanzahl von falschen Vorhersagen von WetterMajority an T Tagen. Zeige:

$$f \ \leq \ \log_{4/3}\left(\frac{W^0}{W^T}\right) \ .$$

c) Sei f_i die Gesamtanzahl von falschen Vorhersagen von Experte i. Nutze die Aussage in b) um zu zeigen, dass für jedes $i \in N$

$$f \leq \frac{1}{\ln(4/3)} \cdot (f_i + \ln N) \quad .$$

Email: `mhoefer@cs.uni-frankfurt.de`, `Nakhe@em.uni-frankfurt.de`