

## Übung 8

Ausgabe: 12.06.2018

Abgabe: 19.06.2018

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und **tackere** diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!

### Aufgabe 8.1. Rucksackauktion

(2 + 4 + 3 Punkte)

In der Vorlesung haben wir einige Algorithmen für die Rucksackauktion betrachtet. In dieser Übung untersuchen wir genauer, ob diese Algorithmen einen anreizkompatiblen Mechanismus ergeben. Zeige, dass...

- ...der Greedy-Algorithmus für jeden Bieter monoton ist.
- ...das volle Approximationsschema mit Granularitätsparameter  $s = \varepsilon \cdot v_{\max}/n$  für mindestens einen Bieter eventuell nicht monoton ist.
- ...das Schema wie in b) mit  $s = \delta$  unabhängig von  $v_1, \dots, v_n$  für jeden Bieter monoton ist.

### Aufgabe 8.2. Single-Minded Auktion

(2 + 4 Punkte)

Betrachte eine Auktion für  $n$  Bieter und eine Menge  $M$  von verschiedenen Gütern. Jeder Bieter ist *single-minded*, d.h. er ist nur an einer bestimmten Teilmenge  $T_i \subseteq M$  der Güter interessiert. Die Teilmengen  $T_i$  sind öffentlich bekannt, aber der entsprechende Wert  $v_i$  der Teilmenge ist privat.

Der Mechanismus erfragt nun alle privaten Werte. Er bestimmt ein Ergebnis, d.h. eine überschneidungsfreie Zuweisung der Güter an die Bieter (mit  $S_i \cap S_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und  $\bigcup_i S_i \subseteq M$ ) und Zahlungen  $p_i$ . Der Nutzen von Bieter  $i$  ist gegeben durch  $v_i \cdot x_i - p_i$  wobei  $x_i = 1$  wenn  $S_i \supseteq T_i$  und sonst 0.

Betrachte den folgenden Greedy-Algorithmus, der ein Ergebnis bestimmt:

```
1: Frage die Gebote  $b_1, \dots, b_n$  ab.
2:  $W = \emptyset, X = M$ 
3: Sortiere und nummeriere die Bieter so dass  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ 
4: for  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  do
5:   if  $T_i \subseteq X$  then
6:     Entferne  $T_i$  von  $X$  und füge  $i$  zu  $W$  hinzu
7:   end if
8: end for
9: return  $S_i = T_i$  für jedes  $i \in W$ , und  $S_i = \emptyset$  sonst.
```

- a) Ist die Ergebnisfunktion des Greedy-Algorithmus für jeden Bieter monoton? Argumentiere oder konstruiere ein Gegenbeispiel.
- b) Sei  $d = \max_i |T_i|$ . Sei  $S_{alg}$  die Zuweisung des Greedy-Algorithmus und  $S^*$  die optimale Zuweisung, die den sozialen Nutzen maximiert. Wir bezeichnen mit  $v(S_{alg})$  und  $v(S^*)$  den Wert des sozialen Nutzens für die jeweiligen Zuweisungen.

Zeige

$$v(S_{alg}) \geq \frac{1}{d} \cdot v(S^*) .$$

*Hinweis: Wenn der Greedy-Algorithmus einen "suboptimalen" Bieter  $i$  auswählt, wieviele "optimale" Bieter kann  $i$  dann blockieren?*

### Aufgabe 8.3. Auktionen mit Ertragsziel

(2 + 3 + 3 Punkte)

Betrachte eine Auktion mit  $k$  identischen Gütern bei der jeder Bieter nur ein Gut möchte. Der Verkäufer hat einen Zielwert  $R \geq 0$  für seinen Ertrag. Der Mechanismus läuft wie folgt ab:

```

1: Frage die Gebote  $b_1, \dots, b_n$  ab.
2: Initialisiere Menge  $S$  mit den  $k$  höchsten Bietern, und setze Zahlungen  $p_i = 0$  für alle  $i \in [n]$ .
3: while ein Bieter  $i \in S$  mit  $b_i < R/|S|$  existiert do
4:   Entferne einen beliebigen solchen Bieter aus  $S$ .
5: end while
6: if  $S \neq \emptyset$  then
7:   for jeden Bieter  $i \in S$  do
8:     Weise  $i$  ein Gut zu und setze die Zahlung  $p_i = R/|S|$ .
9:   end for
10: end if

```

- a) Gib eine formale Beschreibung der Zuweisungsregel an und zeige, dass sie monoton ist.
- b) Zeige, dass die Zuweisungsregel zusammen mit den Zahlungen in Schritt 8 einen anreizkompatiblen Mechanismus ergeben.
- c) Zeige: Wenn irgendeine normalisierte anreizkompatible Auktion einen Ertrag von mindestens  $R$  erzielt, dann erzielt auch die obige Auktion einen Ertrag von mindestens  $R$ .

---

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter <http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/agt/sommer18/agt18.shtml>

Email: [mhoefer@cs.uni-frankfurt.de](mailto:mhoefer@cs.uni-frankfurt.de), [Nakhe@em.uni-frankfurt.de](mailto:Nakhe@em.uni-frankfurt.de)