Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2018

Prof. Dr. Martin Hoefer, Paresh Nakhe

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Algorithmen und Komplexität
Institut für Informatik

Übung 9

Ausgabe: 21.06.2018
Abgabe: 03.07.2018

*Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und **tackere** diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!*

Aufgabe 9.1. *Prophetische Ungleichung* (4 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung eine prophetische Ungleichung gesehen und die folgende Schranke für den Prophet Mechanismus bewiesen

$$\mathbb{E}[v_{a_{i^*}}] \;\geq\; \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}[v_{\max}].$$

Hier wollen wir zeigen, dass $1/2$ der bestmögliche Faktor ist.

Zeige, dass es für jede Konstante $c > 1/2$ eine Instanz mit $n \geq 2$ Bietern und Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ gibt, so dass für jeden (evtl. randomisierten) Online-Algorithmus der erwartete Wert des (evtl. zufällig) gewählten Bieters j nach oben beschränkt ist durch

$$\mathbb{E}[v_j] \;\leq\; c \cdot \mathbb{E}[v_{\max}].$$

Aufgabe 9.2. *Random Order* (4 + 2 Punkte)

a) Betrachte den Beweis für den Wettbewerbsfaktor des Parallele-Sekretäre Mechanismus für die Waldauktion. Sei $S_X = \{h_X(k_i) \mid k_i \in K\}$ für $X \in \{0, 1\}$ und S^* ein optimaler Wald in G. (Siehe Vorlesungsfolien für die entsprechenden Definitionen).

   Zeige die folgende Proposition:

   $$v(S^*) \;\leq\; v(S_0) + v(S_1).$$

b) Betrachte den Random-Threshold Mechanismus, der in der Vorlesung vorgestellt wurde. Begründe mit kurzen und formalen Argumenten, dass der Mechanismus anreizkompatibel ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.3. *Random Thresholds für Matching* (4 + 4 + 4 Punkte)

Gegeben sei ein Graph $G = (K, E)$. Jede Kante $e \in E$ hat einen Wert $v_e \geq 0$. Ein Matching ist eine Kantenmenge $M \subseteq E$ so dass für jeden Knoten $x \in K$ maximal eine inzidente Kante in M ist: $|\{e \in M, x \in e\}| \leq 1$. Sei die Ergebnismenge A die Menge aller Matchings von G. Sei M^* ein Matching mit maximalem Gesamtwert.

a) Der *Greedy Algorithmus* startet mit $M_g = \emptyset$ und durchläuft alle Kanten nacheinander in nicht-steigender Reihenfolge ihrer Werte. Eine Kante wird in M_g eingefügt falls M_g danach weiterhin ein Matching ist. Zeige, dass für das resultierende *Greedy Matching* M_g gilt

$$v(M_g) \geq \frac{1}{2} \cdot v(M^*)$$

Im Random-Order Modell sind anfangs alle Werte der Kanten unbekannt. Die Kanten decken nacheinander in uniform zufälliger Reihenfolge ihren Wert v_e auf. Der Online-Algorithmus muss eine Kante endgültig akzeptieren oder ablehnen bevor er den Wert der nächsten Kante(n) sehen kann. Das Ziel ist, ein möglichst gutes Matching zu akzeptieren. Random-Thresholds kann mit $k = \max_{M \in A} |M|$ direkt auf dieses Problem angewendet werden. Wir zeigen, dass er die gleichen Garantien liefert.

b) Für die Analyse nummerieren wir die Kanten in M_g mit $1, \ldots, |M_g|$ in der Reihenfolge, in der sie vom Greedy Algorithmus eingefügt wurden. Wie in der Vorlesung definieren wir q und $m_i(S)$, hier allerdings bzgl. M_g (nicht S^*). Für das von Random-Thresholds berechnete Matching S gilt, für $1 \leq i \leq q$,

$$\mathbb{E}[m_i(S)] \geq \frac{1}{16(\lceil \log k \rceil + 1)} \cdot i$$

Betrachte den Beweis des entsprechenden Lemmas für Matroide aus der Vorlesung und beschreibe, wie man ihn mit dem Resultat aus a) anpassen muss, um die Aussage zu zeigen.

c) Nutze nochmals das Resultat aus a), sowie die Aussage in b), für den Beweis, dass Random-Thresholds einen Wettbewerbsfaktor von $O(\log k)$ erreicht.

Aufgabe 9.4. *Überbieten im GSP-Spiel* (3 + 3 + 2 Punkte)

Betrachte ein GSP-Spiel mit zwei Bietern und zwei Slots. Dabei sei $v_1 > v_2 \geq 0$ und $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$.

a) Konstruiere ein solches Spiel und ein reines Nash-Gleichgewicht, in dem mindestens ein Spieler überbietet.

b) Zeige oder Widerlege: Der Preis der Anarchie für reine Nash-Gleichgewichte mit Überbieten ist durch eine Konstante unabhängig von der Eingabegröße beschränkt.

c) Gilt das Resultat aus b) auch für die klassische Ein-Gut (Vickrey)-Zweitpreisauktion? Begründe Deine Antwort.

Aufgabe 9.5. *Substitutionsbewertung* (1 + 2 + 3 Punkte)

Zeige oder widerlege für jede dieser Klassen ob sie Substitutionsbewertungen sind oder nicht.

a) Additiv: $v_i(S) = \sum_{j \in S} v_{ij}$ für $v_{ij} \geq 0$.

b) Konkav Multi-Unit: $v_i(S) = \sum_{j=1}^{|S|} v_{ij}$ für $v_{i1} \geq v_{i2} \geq \ldots \geq v_{im} \geq 0$.

c) XOS: $v_i(S) = \max_{k=1,\ldots,h} \sum_{j \in S} v_{ij}^k$ für $v_{ij}^k \geq 0$.

Hinweis: Eine XOS Bewertung ergibt sich jeweils als das Maximum über einer Anzahl von h additiven Bewertungen. Es gibt h beliebige Vektoren von nicht-negativen Zahlen $(v_{ij}^1)_{j \in [m]}, \ldots, (v_{ij}^h)_{j \in [m]}$. Die k-te additive Bewertung ist $v_i^k(S) = \sum_{j \in S} v_{ij}^k$. Der Wert einer Menge S ist der maximale Wert der Menge in einer der k additiven Bewertungen: $v_i(S) = \max_k v_i^k(S)$.

Aufgabe 9.6. *Walras-Gleichgewicht* (3 + 3 Punkte)

a) Betrachte ein Walras-Gleichgewicht mit Zuweisung $(S_1, \ldots, S_n)$ und Preisen $(p_1, \ldots, p_m)$. Zeige, dass diese Zuweisung den sozialen Nutzen maximiert.

b) Betrachte eine ansteigende Auktion mit Bietern Alice und Bob. Es gibt zwei Güter R und L. Beide Bieter haben eine ganzzahlige Substitutionsbewertung:

   - Alice hat eine unit-demand Bewertung mit

   $$v_A(\emptyset) = 0, \quad v_A(\{R\}) = v_A(\{L\}) = v_A(\{R, L\}) = 4$$

   - Bob hat eine additive Bewertung mit

   $$v_B(\emptyset) = 0, \quad v_B(\{R\}) = v_B(\{L\}) = 5 \text{ und } v_B(\{R, L\}) = 10$$

   Zeige, dass die ansteigende Auktion in diesem Fall nicht anreizkompatibel ist.

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
`http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/agt/sommer18/agt18.shtml`

Email: `mhoefer@cs.uni-frankfurt.de`, `Nakhe@em.uni-frankfurt.de`