

## Übung 10

Ausgabe: 03.07.2018

Abgabe: 10.07.2018

Die Abgabe ist in der Vorlesung am Dienstag bis 10:15h möglich. Für frühere Abgaben kannst Du den Briefkasten zwischen Raum 114 und 115 nutzen. Bitte schreibe Deinen Namen (in Druckbuchstaben) und die Matrikelnummer auf deine Lösung und **tackere** diese, wenn sie aus mehreren Seiten besteht!

### Aufgabe 10.1. Hausallokation

(3 Punkte)

Welche der folgenden drei Aussagen gilt für den Random-Serial-Dictatorship Mechanismus:

- Für jede Instanz und jede Reihenfolge ist die berechnete Zuweisung im Kern.
- Für jede Instanz und jede Reihenfolge ist die berechnete Zuweisung nicht im Kern.
- Für jede Instanz gibt es mindestens eine Reihenfolge, so dass die Zuweisung im Kern ist, aber das gilt evtl. nicht für alle Reihenfolgen.

Begründe Deine Antwort.

### Aufgabe 10.2. Postenpositionen ohne Geld

(3 + 3 + 2 + 2 + 4 Punkte)

An den Strandabschnitt  $[0, 1]$  kommen  $n$  Besucher, und jeder Besucher  $i$  hat eine Lieblingsposition  $s_i \in [0, 1]$ . Wir möchten Posten für Rettungsschwimmer aufstellen. Jeder Besucher teilt uns einen Wert  $s'_i \in [0, 1]$  als seine Lieblingsposition mit und möchte erreichen, dass der nächstliegende Posten so nahe wie möglich an seiner Lieblingsposition aufgestellt wird. Sei  $s' = (s'_1, \dots, s'_n)$ . Nehmen wir zuerst an, wir wollen einen Posten an  $p_1 \in [0, 1]$  aufstellen.

- a) Betrachte die Gesamtdistanz aller Besucher von ihrer genannten Position zum gewählten Posten  $p_1$ :

$$d^s(p_1, s') = \sum_{i=1}^n |s'_i - p_1|$$

Zeige oder widerlege: Es gibt einen anreizkompatiblen Mechanismus ohne Geld, der den Posten so aufstellt, dass  $d^s(p_1, s')$  minimiert wird.

- b) Betrachte die Maximaldistanz eines Besuchers von seiner genannten Position zum gewählten Posten  $p_1$ :

$$d^m(p_1, s') = \max_{i=1}^n |s'_i - p_1|$$

Zeige oder widerlege: Es gibt einen anreizkompatiblen Mechanismus ohne Geld, der den Posten so aufstellt, dass  $d^m(p_1, s')$  minimiert wird.

**Bitte wenden!**

Nehmen wir nun an, wir wollen zwei Posten an  $p_1, p_2 \in [0, 1]$  aufstellen.

- c) Betrachte die Maximaldistanz eines Besuchers von seiner genannten Position zum jeweils nächsten Posten

$$d^m(p_1, p_2, s') = \max_{i=1}^n \{\min(|s'_i - p_1|, |s'_i - p_2|)\}$$

Zeige oder widerlege: Es gibt einen anreizkompatiblen Mechanismus ohne Geld, der die beiden Posten immer so aufstellt, dass  $d^m(p_1, p_2, s')$  minimiert wird.

- d) Betrachte den folgenden Max-Min-Mechanismus: Setze  $p_1 = \max_i s'_i$  und  $p_2 = \min_i s'_i$ . Zeige oder widerlege: Dieser Mechanismus ist anreizkompatibel.

- e) Zeige, dass der Max-Min-Mechanismus eine 2-Approximation für die Maximaldistanz erreicht, also dass

$$d^m(p_1, p_2, s') \leq 2 \cdot \min_{q_1, q_2 \in [0, 1]} d^m(q_1, q_2, s').$$