Listen, Keller, Schlangen

Einfach verkettete Listen

Eine Zeiger-Implementierung von einfach-verketteten Listen, also Listen mit Vorwärtszeigern.

Einfach verkettete Listen

Eine Zeiger-Implementierung von einfach-verketteten Listen, also Listen mit Vorwärtszeigern.

//Deklarationsdatei liste.h fuer einfach-verkettete Listen.

Einfach verkettete Listen

Eine Zeiger-Implementierung von einfach-verketteten Listen, also Listen mit Vorwärtszeigern.

```
//Deklarationsdatei liste.h fuer einfach-verkettete Listen.
enum boolean {False, True };
```

Einfach verkettete Listen

Eine Zeiger-Implementierung von einfach-verketteten Listen, also Listen mit Vorwärtszeigern.

```
//Deklarationsdatei liste.h fuer einfach-verkettete Listen.
enum boolean {False, True };
class liste{
```

Einfach verkettete Listen

Eine Zeiger-Implementierung von einfach-verketteten Listen, also Listen mit Vorwärtszeigern.

```
//Deklarationsdatei liste.h fuer einfach-verkettete Listen.
enum boolean {False, True };
class liste{
```

private:

Einfach verkettete Listen

Eine Zeiger-Implementierung von einfach-verketteten Listen, also Listen mit Vorwärtszeigern.

```
//Deklarationsdatei liste.h fuer einfach-verkettete Listen.
enum boolean {False, True };
class liste{

private:
  typedef struct Element {
```

Einfach verkettete Listen

Eine Zeiger-Implementierung von einfach-verketteten Listen, also Listen mit Vorwärtszeigern.

```
//Deklarationsdatei liste.h fuer einfach-verkettete Listen.
enum boolean {False, True };
class liste{

private:
  typedef struct Element {
    int data;
    Element *next;};
```

Einfach verkettete Listen

Eine Zeiger-Implementierung von einfach-verketteten Listen, also Listen mit Vorwärtszeigern.

```
//Deklarationsdatei liste.h fuer einfach-verkettete Listen.
enum boolean {False, True };
class liste{

private:
  typedef struct Element {
    int data;
    Element *next;};
  Element *head, *current;
```

Einfach verkettete Listen

Eine Zeiger-Implementierung von einfach-verketteten Listen, also Listen mit Vorwärtszeigern.

```
//Deklarationsdatei liste.h fuer einfach-verkettete Listen.
enum boolean {False, True };
class liste{

private:
  typedef struct Element {
    int data;
    Element *next;};
  Element *head, *current;

public:
```

Einfach verkettete Listen

Eine Zeiger-Implementierung von einfach-verketteten Listen, also Listen mit Vorwärtszeigern.

```
//Deklarationsdatei liste.h fuer einfach-verkettete Listen.
enum boolean {False, True };
class liste{

private:
  typedef struct Element {
    int data;
    Element *next;};
  Element *head, *current;

public:    liste( ) // Konstruktor
   { head = new Element; current = head; head->next = 0; }
```

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data):**
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**:

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( )**:

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( )**: current erhält den Wert head.

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data):**
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( ):** Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( ):** current erhält den Wert head.
- **void next( ):**

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( )**: current erhält den Wert head.
- **void next( )**: Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( )**: current erhält den Wert head.
- **void next( )**: Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.
- **boolean end( )**:

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( )**: current erhält den Wert head.
- **void next( )**: Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.
- **boolean end( )**: Ist das Ende der Liste erreicht?

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( )**: current erhält den Wert head.
- **void next( )**: Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.
- **boolean end( )**: Ist das Ende der Liste erreicht?
- **boolean empty( )**:

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( )**: current erhält den Wert head.
- **void next( )**: Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.
- **boolean end( )**: Ist das Ende der Liste erreicht?
- **boolean empty( )**: Ist die Liste leer?

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( )**: current erhält den Wert head.
- **void next( )**: Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.
- **boolean end( )**: Ist das Ende der Liste erreicht?
- **boolean empty( )**: Ist die Liste leer?
- **int read( )**:

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data):**
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( ):** Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( ):** current erhält den Wert head.
- **void next( ):** Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.
- **boolean end( ):** Ist das Ende der Liste erreicht?
- **boolean empty( ):** Ist die Liste leer?
- **int read( ):** Gib das Feld data des nächsten Elements aus.

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( )**: current erhält den Wert head.
- **void next( )**: Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.
- **boolean end( )**: Ist das Ende der Liste erreicht?
- **boolean empty( )**: Ist die Liste leer?
- **int read( )**: Gib das Feld data des nächsten Elements aus.
- **void write(int wert)**:

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data)**:
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( )**: Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( )**: current erhält den Wert head.
- **void next( )**: Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.
- **boolean end( )**: Ist das Ende der Liste erreicht?
- **boolean empty( )**: Ist die Liste leer?
- **int read( )**: Gib das Feld data des nächsten Elements aus.
- **void write(int wert)**: Überschreibe das Feld data des nächsten Elements mit der Zahl wert.

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data):**
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( ):** Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( ):** current erhält den Wert head.
- **void next( ):** Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.
- **boolean end( ):** Ist das Ende der Liste erreicht?
- **boolean empty( ):** Ist die Liste leer?
- **int read( ):** Gib das Feld data des nächsten Elements aus.
- **void write(int wert):** Überschreibe das Feld data des nächsten Elements mit der Zahl wert.
- **void search(int wert):**

Public: Die weiteren Operationen

- **void insert(int data):**
  Ein neues Element mit Wert data wird nach dem gegenwärtigen Element eingefügt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void remove( ):** Das dem gegenwärtigen Element folgende Element wird entfernt. Der Wert von current ist unverändert.
- **void movetofront( ):** current erhält den Wert head.
- **void next( ):** Das nächste Element wird aufgesucht. Dazu wird current um eine Position nach rechts bewegt.
- **boolean end( ):** Ist das Ende der Liste erreicht?
- **boolean empty( ):** Ist die Liste leer?
- **int read( ):** Gib das Feld data des nächsten Elements aus.
- **void write(int wert):** Überschreibe das Feld data des nächsten Elements mit der Zahl wert.
- **void search(int wert):** Suche, rechts von der gegenwärtigen Zelle, nach der ersten Zelle z mit Datenfeld wert. Der Zeiger current wird auf den Vorgänger von z zeigen.

Eigenschaften

- Jede Liste besitzt stets eine leere Kopfzelle: **liste()** erzeugt diese Zelle, nachfolgende Einfügungen können nur nach der Kopfzelle durchgeführt werden.

Eigenschaften

- Jede Liste besitzt stets eine leere Kopfzelle: **liste()** erzeugt diese Zelle, nachfolgende Einfügungen können nur nach der Kopfzelle durchgeführt werden.
- Alle Operationen –bis auf search– werden in konstanter Zeit $O(1)$ unterstützt.

Eigenschaften

- Jede Liste besitzt stets eine leere Kopfzelle: **liste()** erzeugt diese Zelle, nachfolgende Einfügungen können nur nach der Kopfzelle durchgeführt werden.
- Alle Operationen –bis auf search– werden in konstanter Zeit $O(1)$ unterstützt. Die search-Funktion benötigt möglicherweiser Zeit proportional zur Länge der Liste.

Eigenschaften

- Jede Liste besitzt stets eine leere Kopfzelle: **liste()** erzeugt diese Zelle, nachfolgende Einfügungen können nur nach der Kopfzelle durchgeführt werden.
- Alle Operationen –bis auf search– werden in konstanter Zeit $O(1)$ unterstützt. Die search-Funktion benötigt möglicherweiser Zeit proportional zur Länge der Liste.

The good and the bad

+ Die Größe der Liste ist proportional zur Anzahl der gespeicherten Elemente: Die Liste passt sich der darzustellenden Menge an.

Eigenschaften

- Jede Liste besitzt stets eine leere Kopfzelle: **liste()** erzeugt diese Zelle, nachfolgende Einfügungen können nur nach der Kopfzelle durchgeführt werden.
- Alle Operationen –bis auf search– werden in konstanter Zeit $O(1)$ unterstützt. Die search-Funktion benötigt möglicherweiser Zeit proportional zur Länge der Liste.

The good and the bad

+ Die Größe der Liste ist proportional zur Anzahl der gespeicherten Elemente: Die Liste passt sich der darzustellenden Menge an.
- Die Suche dauert viel zu lange.

Die Addition dünn besetzter Matrizen

A und B sind Matrizen mit n Zeilen und m Spalten.
Berechne die Summe $C = A + B$.

Die Addition dünn besetzter Matrizen

A und B sind Matrizen mit n Zeilen und m Spalten.
Berechne die Summe $C = A + B$.

- Das Programm

```
for (i=0 ; i < n; i++)
```

Die Addition dünn besetzter Matrizen

A und B sind Matrizen mit n Zeilen und m Spalten.
Berechne die Summe $C = A + B$.

- Das Programm

```
for (i=0 ; i < n; i++)
  for (j=0 ; j < m; j++)
```

Die Addition dünn besetzter Matrizen

A und B sind Matrizen mit n Zeilen und m Spalten.
Berechne die Summe $C = A + B$.

- Das Programm

```
for (i=0 ; i < n; i++)
  for (j=0 ; j < m; j++)
    C[i,j] = A[i,j] + B[i,j];
```

Die Addition dünn besetzter Matrizen

A und B sind Matrizen mit n Zeilen und m Spalten.
Berechne die Summe $C = A + B$.

- Das Programm

```
for (i=0 ; i < n; i++)
  for (j=0 ; j < m; j++)
    C[i,j] = A[i,j] + B[i,j];
```

  bestimmt C in Zeit

Die Addition dünn besetzter Matrizen

A und B sind Matrizen mit n Zeilen und m Spalten.
Berechne die Summe $C = A + B$.

- Das Programm

```
for (i=0 ; i < n; i++)
  for (j=0 ; j < m; j++)
    C[i,j] = A[i,j] + B[i,j];
```

bestimmt C in Zeit $O(n \cdot m)$.

Die Addition dünn besetzter Matrizen

A und B sind Matrizen mit n Zeilen und m Spalten.
Berechne die Summe $C = A + B$.

- Das Programm

```
for (i=0 ; i < n; i++)
  for (j=0 ; j < m; j++)
    C[i,j] = A[i,j] + B[i,j];
```

  bestimmt C in Zeit $O(n \cdot m)$.

- **Ziel**: Bestimme C in Zeit $O(a + b)$, wobei a und b die Anzahl der von Null verschiedenen Einträge von A und B ist.

Listendarstellung von Matrizen

- Stelle A und B durch einfach verkettete Listen L_A und L_B in Zeilenordnung dar.

Listendarstellung von Matrizen

- Stelle A und B durch einfach verkettete Listen L_A und L_B in Zeilenordnung dar.
- Jedes Listenelement speichert neben dem Wert eines Eintrags auch die Zeile und die Spalte des Eintrags.

Listendarstellung von Matrizen

- Stelle A und B durch einfach verkettete Listen L_A und L_B in Zeilenordnung dar.
- Jedes Listenelement speichert neben dem Wert eines Eintrags auch die Zeile und die Spalte des Eintrags.

Die Zeilenordnung für $A \equiv \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ist

Listendarstellung von Matrizen

- Stelle A und B durch einfach verkettete Listen L_A und L_B in Zeilenordnung dar.
- Jedes Listenelement speichert neben dem Wert eines Eintrags auch die Zeile und die Spalte des Eintrags.

Die Zeilenordnung für $A \equiv \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ist

$$\rightarrow \boxed{1 \mid 2 \mid 9} \rightarrow \boxed{2 \mid 1 \mid 7} \rightarrow \boxed{2 \mid 3 \mid 5} \rightarrow \boxed{3 \mid 3 \mid 6} \rightarrow$$

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.
(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

   (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

   (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

   (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$),

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

  (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

  (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

   (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

   (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

  (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

  (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

  (c) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A < j_B$ (bzw. $j_A > j_B$),

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

   (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

   (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

   (c) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A < j_B$ (bzw. $j_A > j_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

    (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

    (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

    (c) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A < j_B$ (bzw. $j_A > j_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

   (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

   (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

   (c) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A < j_B$ (bzw. $j_A > j_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

   (d) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A = j_B$,

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

    (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).
    (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).
    (c) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A < j_B$ (bzw. $j_A > j_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).
    (d) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A = j_B$, dann addiere die beiden Einträge und füge die Summe in die Liste L_C ein.

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

   (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

   (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

   (c) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A < j_B$ (bzw. $j_A > j_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

   (d) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A = j_B$, dann addiere die beiden Einträge und füge die Summe in die Liste L_C ein. Die Zeiger in beiden Listen werden nach rechts bewegt.

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

   (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

   (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

   (c) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A < j_B$ (bzw. $j_A > j_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

   (d) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A = j_B$, dann addiere die beiden Einträge und füge die Summe in die Liste L_C ein. Die Zeiger in beiden Listen werden nach rechts bewegt.

(3) Wenn die Liste L_A (bzw. L_B) leer ist,

Der Algorithmus

(1) Beginne jeweils am Anfang der Listen L_A und L_B.

(2) Solange beide Listen nicht-leer sind, wiederhole

  (a) das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) habe die Koordinaten (i_A, j_A) (bzw. (i_B, j_B)).

  (b) Wenn $i_A < i_B$ (bzw. $i_A > i_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

  (c) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A < j_B$ (bzw. $j_A > j_B$), dann füge das gegenwärtige Listenelement von L_A (bzw. L_B) in die Liste L_C ein und gehe zum nächsten Listenelement von L_A (bzw. L_B).

  (d) Wenn $i_A = i_B$ und $j_A = j_B$, dann addiere die beiden Einträge und füge die Summe in die Liste L_C ein. Die Zeiger in beiden Listen werden nach rechts bewegt.

(3) Wenn die Liste L_A (bzw. L_B) leer ist, kann der Rest der Liste L_B (bzw. L_A) an die Liste L_C angehängt werden.

Deques, Stacks und Queues

- Der abstrakte Datentyp **Stack** unterstützt die Operationen
  - `pop` : Entferne den jüngsten Schlüssel.
  - `push` : Füge einen Schlüssel ein.

  Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die nicht-rekursive Implementierung rekursiver Programme.

Deques, Stacks und Queues

- Der abstrakte Datentyp **Stack** unterstützt die Operationen
  - `pop` : Entferne den jüngsten Schlüssel.
  - `push` : Füge einen Schlüssel ein.

  Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die nicht-rekursive Implementierung rekursiver Programme.
- Eine **Queue** modelliert das Konzept einer Warteschlange und unterstützt die Operationen
  - `dequeue`: Entferne den ältesten Schlüssel.
  - `enqueue` : Füge einen Schlüssel ein.

Deques, Stacks und Queues

- Der abstrakte Datentyp **Stack** unterstützt die Operationen
  - `pop` : Entferne den jüngsten Schlüssel.
  - `push` : Füge einen Schlüssel ein.

  Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die nicht-rekursive Implementierung rekursiver Programme.
- Eine **Queue** modelliert das Konzept einer Warteschlange und unterstützt die Operationen
  - `dequeue`: Entferne den ältesten Schlüssel.
  - `enqueue` : Füge einen Schlüssel ein.
- Stacks und Queues werden von einem **Deque** verallgemeinert.

Deques, Stacks und Queues

- Der abstrakte Datentyp **Stack** unterstützt die Operationen
  - `pop` : Entferne den jüngsten Schlüssel.
  - `push` : Füge einen Schlüssel ein.

  Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die nicht-rekursive Implementierung rekursiver Programme.
- Eine **Queue** modelliert das Konzept einer Warteschlange und unterstützt die Operationen
  - `dequeue`: Entferne den ältesten Schlüssel.
  - `enqueue` : Füge einen Schlüssel ein.
- Stacks und Queues werden von einem **Deque** verallgemeinert. Die folgenden Operationen werden unterstützt:

Deques, Stacks und Queues

- Der abstrakte Datentyp **Stack** unterstützt die Operationen
  - `pop` : Entferne den jüngsten Schlüssel.
  - `push` : Füge einen Schlüssel ein.

  Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die nicht-rekursive Implementierung rekursiver Programme.
- Eine **Queue** modelliert das Konzept einer Warteschlange und unterstützt die Operationen
  - `dequeue`: Entferne den ältesten Schlüssel.
  - `enqueue` : Füge einen Schlüssel ein.
- Stacks und Queues werden von einem **Deque** verallgemeinert. Die folgenden Operationen werden unterstützt:
  - `insertleft` : Füge einen Schlüssel am linken Ende ein.

Deques, Stacks und Queues

- Der abstrakte Datentyp **Stack** unterstützt die Operationen
  - `pop` : Entferne den jüngsten Schlüssel.
  - `push` : Füge einen Schlüssel ein.

  Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die nicht-rekursive Implementierung rekursiver Programme.
- Eine **Queue** modelliert das Konzept einer Warteschlange und unterstützt die Operationen
  - `dequeue`: Entferne den ältesten Schlüssel.
  - `enqueue` : Füge einen Schlüssel ein.
- Stacks und Queues werden von einem **Deque** verallgemeinert. Die folgenden Operationen werden unterstützt:
  - `insertleft` : Füge einen Schlüssel am linken Ende ein.
  - `insertright` : Füge einen Schlüssel am rechten Ende ein.

Deques, Stacks und Queues

- Der abstrakte Datentyp **Stack** unterstützt die Operationen
  - `pop` : Entferne den jüngsten Schlüssel.
  - `push` : Füge einen Schlüssel ein.

  Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die nicht-rekursive Implementierung rekursiver Programme.
- Eine **Queue** modelliert das Konzept einer Warteschlange und unterstützt die Operationen
  - `dequeue`: Entferne den ältesten Schlüssel.
  - `enqueue` : Füge einen Schlüssel ein.
- Stacks und Queues werden von einem **Deque** verallgemeinert. Die folgenden Operationen werden unterstützt:
  - `insertleft` : Füge einen Schlüssel am linken Ende ein.
  - `insertright` : Füge einen Schlüssel am rechten Ende ein.
  - `removeleft` : Entferne den Schlüssel am linken Ende.

Deques, Stacks und Queues

- Der abstrakte Datentyp **Stack** unterstützt die Operationen
  - `pop` : Entferne den jüngsten Schlüssel.
  - `push` : Füge einen Schlüssel ein.

  Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die nicht-rekursive Implementierung rekursiver Programme.
- Eine **Queue** modelliert das Konzept einer Warteschlange und unterstützt die Operationen
  - `dequeue`: Entferne den ältesten Schlüssel.
  - `enqueue` : Füge einen Schlüssel ein.
- Stacks und Queues werden von einem **Deque** verallgemeinert. Die folgenden Operationen werden unterstützt:
  - `insertleft` : Füge einen Schlüssel am linken Ende ein.
  - `insertright` : Füge einen Schlüssel am rechten Ende ein.
  - `removeleft` : Entferne den Schlüssel am linken Ende.
  - `removeright` : Entferne den Schlüssel am rechten Ende.

Wie werden Deques und Listen implementiert?

Die Implementierung eines Deque

- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.

Die Implementierung eines Deque

- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.
  - Der Inhalt des Deques wird jetzt entsprechend den Operationen „über den entstandenen Ring“ geschoben.

Die Implementierung eines Deque

- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.
  - Der Inhalt des Deques wird jetzt entsprechend den Operationen „über den entstandenen Ring“ geschoben.
- Benutze zwei Positionsvariable **left** und **right**: **left** steht jeweils **vor** dem linken Ende und **right** jeweils **auf** dem rechten Ende.

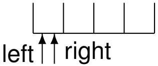
Die Implementierung eines Deque

- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.
  - Der Inhalt des Deques wird jetzt entsprechend den Operationen „über den entstandenen Ring“ geschoben.
- Benutze zwei Positionsvariable **left** und **right**: **left** steht jeweils **vor** dem linken Ende und **right** jeweils **auf** dem rechten Ende.
- **Forderung**:
  Die Zelle mit Index **left** ist stets leer und anfänglich ist **left = right**.

Die Implementierung eines Deque

- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.
  - Der Inhalt des Deques wird jetzt entsprechend den Operationen „über den entstandenen Ring“ geschoben.
- Benutze zwei Positionsvariable **left** und **right**: **left** steht jeweils **vor** dem linken Ende und **right** jeweils **auf** dem rechten Ende.
- **Forderung**:
  Die Zelle mit Index **left** ist stets leer und anfänglich ist **left = right**.

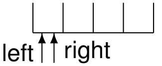
Anfangs



Die Implementierung eines Deque

- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.
  - Der Inhalt des Deques wird jetzt entsprechend den Operationen „über den entstandenen Ring“ geschoben.
- Benutze zwei Positionsvariable **left** und **right**: **left** steht jeweils **vor** dem linken Ende und **right** jeweils **auf** dem rechten Ende.
- **Forderung**:
  Die Zelle mit Index **left** ist stets leer und anfänglich ist **left = right**.

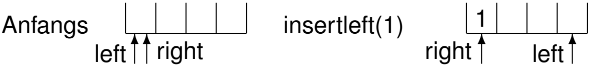
Anfangs



insertleft(1)

Die Implementierung eines Deque

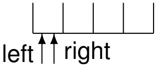
- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.
  - Der Inhalt des Deques wird jetzt entsprechend den Operationen „über den entstandenen Ring“ geschoben.
- Benutze zwei Positionsvariable **left** und **right**: **left** steht jeweils **vor** dem linken Ende und **right** jeweils **auf** dem rechten Ende.
- **Forderung**:
  Die Zelle mit Index **left** ist stets leer und anfänglich ist **left = right**.



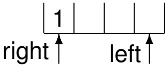
Die Implementierung eines Deque

- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.
  - Der Inhalt des Deques wird jetzt entsprechend den Operationen „über den entstandenen Ring“ geschoben.
- Benutze zwei Positionsvariable **left** und **right**: **left** steht jeweils **vor** dem linken Ende und **right** jeweils **auf** dem rechten Ende.
- **Forderung**:
  Die Zelle mit Index **left** ist stets leer und anfänglich ist **left = right**.

Anfangs



insertleft(1)

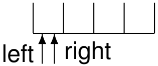


insertleft(2):

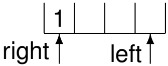
Die Implementierung eines Deque

- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.
  - Der Inhalt des Deques wird jetzt entsprechend den Operationen „über den entstandenen Ring“ geschoben.
- Benutze zwei Positionsvariable **left** und **right**: **left** steht jeweils **vor** dem linken Ende und **right** jeweils **auf** dem rechten Ende.
- **Forderung**:
  Die Zelle mit Index **left** ist stets leer und anfänglich ist **left = right**.

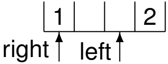
Anfangs



insertleft(1)



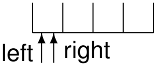
insertleft(2):



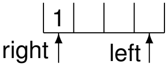
Die Implementierung eines Deque

- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.
  - Der Inhalt des Deques wird jetzt entsprechend den Operationen „über den entstandenen Ring“ geschoben.
- Benutze zwei Positionsvariable **left** und **right**: **left** steht jeweils **vor** dem linken Ende und **right** jeweils **auf** dem rechten Ende.
- **Forderung**:
  Die Zelle mit Index **left** ist stets leer und anfänglich ist **left = right**.

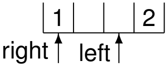
Anfangs



insertleft(1)



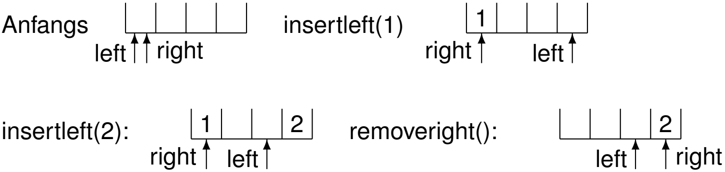
insertleft(2):



removeright():

Die Implementierung eines Deque

- Benutze ein an beiden Enden „zusammengeschweißtes“ 1-dimensionales Array.
  - Der Inhalt des Deques wird jetzt entsprechend den Operationen „über den entstandenen Ring“ geschoben.
- Benutze zwei Positionsvariable **left** und **right**: **left** steht jeweils **vor** dem linken Ende und **right** jeweils **auf** dem rechten Ende.
- **Forderung**:
  Die Zelle mit Index **left** ist stets leer und anfänglich ist **left = right**.



Eine Implementierung von Listen durch Arrays (1/2)

Eine einfach verkettete Liste bestehe aus Zellen mit einem **integer-Datenfeld** und einem **Vorwärtszeiger**.
Zu keinem Zeitpunkt möge die Liste mehr als n Elemente besitzen.

Eine Implementierung von Listen durch Arrays (1/2)

Eine einfach verkettete Liste bestehe aus Zellen mit einem **integer-Datenfeld** und einem **Vorwärtszeiger**.
Zu keinem Zeitpunkt möge die Liste mehr als n Elemente besitzen.

- **Daten** und **Zeiger** seien Arrays der Größe n.

Eine Implementierung von Listen durch Arrays (1/2)

Eine einfach verkettete Liste bestehe aus Zellen mit einem **integer-Datenfeld** und einem **Vorwärtszeiger**.
Zu keinem Zeitpunkt möge die Liste mehr als n Elemente besitzen.

- **Daten** und **Zeiger** seien Arrays der Größe n.
- Wenn ein Listenelement den „Index i erhält“, dann ist **Daten**[i] der Wert des Listenelements und **Zeiger**[i] der Index des rechten Nachbarn.

Eine Implementierung von Listen durch Arrays (1/2)

Eine einfach verkettete Liste bestehe aus Zellen mit einem **integer-Datenfeld** und einem **Vorwärtszeiger**.
Zu keinem Zeitpunkt möge die Liste mehr als n Elemente besitzen.

- **Daten** und **Zeiger** seien Arrays der Größe n.
- Wenn ein Listenelement den „Index i erhält“, dann ist **Daten**[i] der Wert des Listenelements und **Zeiger**[i] der Index des rechten Nachbarn.
- Für die Speicherverwaltung benutze eine zusätzliche Datenstruktur **Frei**, die die Menge der freien Indizes verwaltet.

  Zu Anfang ist **Frei**$= \{0, \ldots, n-1\}$.

Eine Implementierung von Listen durch Arrays (2/2)

- Wenn ein Element mit Wert w nach einem Element mit Index i einzufügen ist:

  Wenn **Frei** nicht-leer ist, dann entnimm einen freien Index j und setze **Daten**$[j] =$

Eine Implementierung von Listen durch Arrays (2/2)

- Wenn ein Element mit Wert w nach einem Element mit Index i einzufügen ist:

  Wenn **Frei** nicht-leer ist, dann entnimm einen freien Index j und setze **Daten**$[j] = w$, **Zeiger**$[j] =$

Eine Implementierung von Listen durch Arrays (2/2)

- Wenn ein Element mit Wert w nach einem Element mit Index i einzufügen ist:

  Wenn **Frei** nicht-leer ist, dann entnimm einen freien Index j und setze **Daten**$[j] = w$, **Zeiger**$[j] =$ **Zeiger**$[i]$ und **Zeiger**$[i] =$

Eine Implementierung von Listen durch Arrays (2/2)

- Wenn ein Element mit Wert w nach einem Element mit Index i einzufügen ist:

  Wenn **Frei** nicht-leer ist, dann entnimm einen freien Index j und setze **Daten**$[j] = w$, **Zeiger**$[j] =$ **Zeiger**$[i]$ und **Zeiger**$[i] = j$.

- Wenn ein Element zu entfernen ist, dessen Vorgänger den Index i besitzt:

Eine Implementierung von Listen durch Arrays (2/2)

- Wenn ein Element mit Wert w nach einem Element mit Index i einzufügen ist:

  Wenn **Frei** nicht-leer ist, dann entnimm einen freien Index j und setze **Daten**$[j] = w$, **Zeiger**$[j] =$ **Zeiger**$[i]$ und **Zeiger**$[i] = j$.

- Wenn ein Element zu entfernen ist, dessen Vorgänger den Index i besitzt:

  Füge $j =$ **Zeiger**$[i]$ in die Datenstruktur Frei ein und setze **Zeiger**$[i] =$

Eine Implementierung von Listen durch Arrays (2/2)

- Wenn ein Element mit Wert w nach einem Element mit Index i einzufügen ist:

  Wenn **Frei** nicht-leer ist, dann entnimm einen freien Index j und setze **Daten**$[j] = w$, **Zeiger**$[j] =$ **Zeiger**$[i]$ und **Zeiger**$[i] = j$.

- Wenn ein Element zu entfernen ist, dessen Vorgänger den Index i besitzt:

  Füge $j =$ **Zeiger**$[i]$ in die Datenstruktur Frei ein und setze **Zeiger**$[i] =$ **Zeiger**$[j]$.

- Welche Datenstruktur ist für **Frei** zu wählen?

Eine Implementierung von Listen durch Arrays (2/2)

- Wenn ein Element mit Wert w nach einem Element mit Index i einzufügen ist:

  Wenn **Frei** nicht-leer ist, dann entnimm einen freien Index j und setze **Daten**$[j] = w$, **Zeiger**$[j] =$ **Zeiger**$[i]$ und **Zeiger**$[i] = j$.

- Wenn ein Element zu entfernen ist, dessen Vorgänger den Index i besitzt:

  Füge $j =$ **Zeiger**$[i]$ in die Datenstruktur Frei ein und setze **Zeiger**$[i] =$ **Zeiger**$[j]$.

- Welche Datenstruktur ist für **Frei** zu wählen?

  Jede Datenstruktur, die es erlaubt, Elemente einzufügen und zu entfernen, tut's: ein Stack, eine Queue oder ein Deque ist OK.

Bäume

Bäume

Gewurzelte Bäume für die hierarchische Strukturierung von Daten.

- Gewurzelte Bäume als konzeptionelle Hilfsmittel für
  - von einem Benutzer angelegte Verzeichnisse,
  - als Nachfahrenbaum
  - oder für die Veranschaulichung rekursiver Programme (Rekursionsbaum oder Baum einer Rekursionsgleichung).

Bäume

Gewurzelte Bäume für die hierarchische Strukturierung von Daten.

- Gewurzelte Bäume als konzeptionelle Hilfsmittel für
  - von einem Benutzer angelegte Verzeichnisse,
  - als Nachfahrenbaum
  - oder für die Veranschaulichung rekursiver Programme (Rekursionsbaum oder Baum einer Rekursionsgleichung).
- Gewurzelte Bäume als Datenstrukturen von Algorithmen:
  - in der Auswertung arithmetischer Ausdrücke,

Bäume

Gewurzelte Bäume für die hierarchische Strukturierung von Daten.

- Gewurzelte Bäume als konzeptionelle Hilfsmittel für
  - von einem Benutzer angelegte Verzeichnisse,
  - als Nachfahrenbaum
  - oder für die Veranschaulichung rekursiver Programme (Rekursionsbaum oder Baum einer Rekursionsgleichung).
- Gewurzelte Bäume als Datenstrukturen von Algorithmen:
  - in der Auswertung arithmetischer Ausdrücke,
  - in der Syntaxerkennung mit Hilfe von Syntaxbäumen,
  - im systematischen Aufzählen von Lösungen (Entscheidungsbäume)
  - oder in der Lösung von Suchproblemen.

Was ist ein gewurzelter Baum?

Ein gewurzelter Baum T wird durch eine **Knotenmenge** V und eine **Kantenmenge** $E \subseteq V \times V - \{(i,i) \mid i \in V\}$ dargestellt.
Die gerichtete Kante (i,j) führt **von** i **nach** j.

Was ist ein gewurzelter Baum?

Ein gewurzelter Baum T wird durch eine **Knotenmenge** V und eine **Kantenmenge** $E \subseteq V \times V - \{(i,i) \mid i \in V\}$ dargestellt.
Die gerichtete Kante (i,j) führt **von** i **nach** j.

Wann ist T ein gewurzelter Baum?

Was ist ein gewurzelter Baum?

Ein gewurzelter Baum T wird durch eine **Knotenmenge** V und eine **Kantenmenge** $E \subseteq V \times V - \{(i,i) \mid i \in V\}$ dargestellt.
Die gerichtete Kante (i,j) führt **von** i **nach** j.

Wann ist T ein gewurzelter Baum?

- T muss genau einen Knoten r besitzen, in den keine Kante hineinführt. r heißt die **Wurzel** von T.

Was ist ein gewurzelter Baum?

Ein gewurzelter Baum T wird durch eine **Knotenmenge** V und eine **Kantenmenge** $E \subseteq V \times V - \{(i,i) \mid i \in V\}$ dargestellt.
Die gerichtete Kante (i,j) führt **von** i **nach** j.

Wann ist T ein gewurzelter Baum?

- T muss genau einen Knoten r besitzen, in den keine Kante hineinführt. r heißt die **Wurzel** von T.
- In jeden Knoten darf höchstens eine Kante hineinführen

Was ist ein gewurzelter Baum?

Ein gewurzelter Baum T wird durch eine **Knotenmenge** V und eine **Kantenmenge** $E \subseteq V \times V - \{(i,i) \mid i \in V\}$ dargestellt.
Die gerichtete Kante (i,j) führt **von** i **nach** j.

Wann ist T ein gewurzelter Baum?

- T muss genau einen Knoten r besitzen, in den keine Kante hineinführt. r heißt die **Wurzel** von T.
- In jeden Knoten darf höchstens eine Kante hineinführen
- und jeder Knoten muss von der Wurzel aus erreichbar sein.

Was ist ein gewurzelter Baum?

Ein gewurzelter Baum T wird durch eine **Knotenmenge** V und eine **Kantenmenge** $E \subseteq V \times V - \{(i, i) \mid i \in V\}$ dargestellt.
Die gerichtete Kante (i, j) führt **von** i **nach** j.

Wann ist T ein gewurzelter Baum?

- T muss genau einen Knoten r besitzen, in den keine Kante hineinführt. r heißt die **Wurzel** von T.
- In jeden Knoten darf höchstens eine Kante hineinführen
- und jeder Knoten muss von der Wurzel aus erreichbar sein.

(Ab jetzt sprechen wir nur von Bäumen und meinen gewurzelte Bäume.)

Eine (knotendisjunkte) Vereinigung von Bäumen heißt ein **Wald**.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.
  - Einen Knoten b mit Aus-Grad $(b) = 0$ bezeichnen wir als **Blatt**.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.
  - Einen Knoten b mit Aus-Grad $(b) = 0$ bezeichnen wir als **Blatt**.
  - T heißt k-**när**, falls der Aus-Grad aller Knoten höchstens k ist.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.
  - Einen Knoten b mit Aus-Grad $(b) = 0$ bezeichnen wir als **Blatt**.
  - T heißt k-**när**, falls der Aus-Grad aller Knoten höchstens k ist. Für $k = 2$ sprechen wir von **binären Bäumen**.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.
  - Einen Knoten b mit Aus-Grad $(b) = 0$ bezeichnen wir als **Blatt**.
  - T heißt k-**när**, falls der Aus-Grad aller Knoten höchstens k ist. Für $k = 2$ sprechen wir von **binären Bäumen**.
- Ein **Weg** von v nach w ist eine Folge $(v_0, \dots, v_m)$ von Knoten mit $v_0 = v$, $v_m = w$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle i $(0 \leq i < m)$.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.
  - Einen Knoten b mit Aus-Grad $(b) = 0$ bezeichnen wir als **Blatt**.
  - T heißt k-**när**, falls der Aus-Grad aller Knoten höchstens k ist. Für $k = 2$ sprechen wir von **binären Bäumen**.
- Ein **Weg** von v nach w ist eine Folge $(v_0, \ldots, v_m)$ von Knoten mit $v_0 = v, v_m = w$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle i $(0 \leq i < m)$.
  - v ist ein **Vorfahre** von w und w ein **Nachfahre** von v.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.
  - Einen Knoten b mit Aus-Grad $(b) = 0$ bezeichnen wir als **Blatt**.
  - T heißt k-**när**, falls der Aus-Grad aller Knoten höchstens k ist. Für $k = 2$ sprechen wir von **binären Bäumen**.
- Ein **Weg** von v nach w ist eine Folge $(v_0, \ldots, v_m)$ von Knoten mit $v_0 = v, v_m = w$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle i $(0 \leq i < m)$.
  - v ist ein **Vorfahre** von w und w ein **Nachfahre** von v.
  - Die **Länge** des Weges ist m,

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.
  - Einen Knoten b mit Aus-Grad $(b) = 0$ bezeichnen wir als **Blatt**.
  - T heißt k-**när**, falls der Aus-Grad aller Knoten höchstens k ist. Für $k = 2$ sprechen wir von **binären Bäumen**.
- Ein **Weg** von v nach w ist eine Folge $(v_0, \ldots, v_m)$ von Knoten mit $v_0 = v, v_m = w$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle i $(0 \leq i < m)$.
  - v ist ein **Vorfahre** von w und w ein **Nachfahre** von v.
  - Die **Länge** des Weges ist m, die Anzahl der Kanten des Weges.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.
  - Einen Knoten b mit Aus-Grad $(b) = 0$ bezeichnen wir als **Blatt**.
  - T heißt k-**när**, falls der Aus-Grad aller Knoten höchstens k ist. Für $k = 2$ sprechen wir von **binären Bäumen**.
- Ein **Weg** von v nach w ist eine Folge $(v_0, \ldots, v_m)$ von Knoten mit $v_0 = v, v_m = w$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle i $(0 \leq i < m)$.
  - v ist ein **Vorfahre** von w und w ein **Nachfahre** von v.
  - Die **Länge** des Weges ist m, die Anzahl der Kanten des Weges.
  - **Tiefe**(v) ist die Länge des (eindeutigen) Weges von r nach v.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.
  - Einen Knoten b mit Aus-Grad $(b) = 0$ bezeichnen wir als **Blatt**.
  - T heißt k-**när**, falls der Aus-Grad aller Knoten höchstens k ist. Für $k = 2$ sprechen wir von **binären Bäumen**.
- Ein **Weg** von v nach w ist eine Folge $(v_0, \ldots, v_m)$ von Knoten mit $v_0 = v, v_m = w$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle i $(0 \leq i < m)$.
  - v ist ein **Vorfahre** von w und w ein **Nachfahre** von v.
  - Die **Länge** des Weges ist m, die Anzahl der Kanten des Weges.
  - **Tiefe**(v) ist die Länge des (eindeutigen) Weges von r nach v.
  - **Höhe**(v) ist die Länge des längsten Weges von v zu einem Blatt.

Zentrale Begriffe

- Wenn (v, w) eine Kante ist, dann nennen wir v den **Elternknoten** von w und sagen, dass w ein **Kind** von v ist.
  - Die anderen Kinder von v heißen **Geschwister** von w.
- **Aus-Grad** (v) ist die Anzahl der Kinder von v.
  - Einen Knoten b mit Aus-Grad $(b) = 0$ bezeichnen wir als **Blatt**.
  - T heißt k-**När**, falls der Aus-Grad aller Knoten höchstens k ist. Für $k = 2$ sprechen wir von **binären Bäumen**.
- Ein **Weg** von v nach w ist eine Folge $(v_0, \ldots, v_m)$ von Knoten mit $v_0 = v, v_m = w$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle i $(0 \leq i < m)$.
  - v ist ein **Vorfahre** von w und w ein **Nachfahre** von v.
  - Die **Länge** des Weges ist m, die Anzahl der Kanten des Weges.
  - **Tiefe**(v) ist die Länge des (eindeutigen) Weges von r nach v.
  - **Höhe**(v) ist die Länge des längsten Weges von v zu einem Blatt.
- T heißt **geordnet**, falls für jeden Knoten eine Reihenfolge der Kinder vorliegt.

Operationen auf Bäumen

(1) `Wurzel`: Bestimme die Wurzel von T.

Operationen auf Bäumen

(1) `Wurzel`: Bestimme die Wurzel von T.

(2) `Eltern`(v): Bestimme den Elternknoten des Knotens v in T.
Wenn $v = r$, dann ist der Null-Zeiger auszugeben.

Operationen auf Bäumen

(1) `Wurzel`: Bestimme die Wurzel von T.

(2) `Eltern`(v): Bestimme den Elternknoten des Knotens v in T.
Wenn $v = r$, dann ist der Null-Zeiger auszugeben.

(3) `Kinder`(v): Bestimme die Kinder von v. Wenn v ein Blatt ist, dann ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

Operationen auf Bäumen

(1) `Wurzel`: Bestimme die Wurzel von T.

(2) `Eltern`(v): Bestimme den Elternknoten des Knotens v in T.
Wenn $v = r$, dann ist der Null-Zeiger auszugeben.

(3) `Kinder`(v): Bestimme die Kinder von v. Wenn v ein Blatt ist, dann ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

(4) Für binäre geordnete Bäume:

Operationen auf Bäumen

(1) `Wurzel`: Bestimme die Wurzel von T.

(2) `Eltern`(v): Bestimme den Elternknoten des Knotens v in T.
Wenn $v = r$, dann ist der Null-Zeiger auszugeben.

(3) `Kinder`(v): Bestimme die Kinder von v. Wenn v ein Blatt ist, dann ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

(4) Für binäre geordnete Bäume:

- (4a) `LKind`(v): Bestimme das linke Kind von v.
- (4b) `RKind`(v): Bestimme das rechte Kind von v.
- (4c) Sollte das entsprechende Kind nicht existieren, ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

Operationen auf Bäumen

(1) `Wurzel`: Bestimme die Wurzel von T.

(2) `Eltern`(v): Bestimme den Elternknoten des Knotens v in T.
Wenn $v = r$, dann ist der Null-Zeiger auszugeben.

(3) `Kinder`(v): Bestimme die Kinder von v. Wenn v ein Blatt ist, dann ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

(4) Für binäre geordnete Bäume:

  (4a) `LKind`(v): Bestimme das linke Kind von v.
  (4b) `RKind`(v): Bestimme das rechte Kind von v.
  (4c) Sollte das entsprechende Kind nicht existieren, ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

(5) `Tiefe`(v): Bestimme die Tiefe von v.

Operationen auf Bäumen

(1) `Wurzel`: Bestimme die Wurzel von T.

(2) `Eltern`(v): Bestimme den Elternknoten des Knotens v in T.
Wenn $v = r$, dann ist der Null-Zeiger auszugeben.

(3) `Kinder`(v): Bestimme die Kinder von v. Wenn v ein Blatt ist, dann ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

(4) Für binäre geordnete Bäume:

  (4a) `LKind`(v): Bestimme das linke Kind von v.
  (4b) `RKind`(v): Bestimme das rechte Kind von v.
  (4c) Sollte das entsprechende Kind nicht existieren, ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

(5) `Tiefe`(v): Bestimme die Tiefe von v.

(6) `Höhe`(v): Bestimme die Höhe von v.

Operationen auf Bäumen

(1) `Wurzel`: Bestimme die Wurzel von T.

(2) `Eltern`(v): Bestimme den Elternknoten des Knotens v in T.
Wenn $v = r$, dann ist der Null-Zeiger auszugeben.

(3) `Kinder`(v): Bestimme die Kinder von v. Wenn v ein Blatt ist, dann ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

(4) Für binäre geordnete Bäume:

- (4a) `LKind`(v): Bestimme das linke Kind von v.
- (4b) `RKind`(v): Bestimme das rechte Kind von v.
- (4c) Sollte das entsprechende Kind nicht existieren, ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

(5) `Tiefe`(v): Bestimme die Tiefe von v.

(6) `Höhe`(v): Bestimme die Höhe von v.

(7) `Baum`($v, T_1, \ldots, T_m$): Erzeuge einen geordneten Baum mit Wurzel v und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

Operationen auf Bäumen

(1) `Wurzel`: Bestimme die Wurzel von T.

(2) `Eltern`(v): Bestimme den Elternknoten des Knotens v in T.
Wenn $v = r$, dann ist der Null-Zeiger auszugeben.

(3) `Kinder`(v): Bestimme die Kinder von v. Wenn v ein Blatt ist, dann ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

(4) Für binäre geordnete Bäume:

- (4a) `LKind`(v): Bestimme das linke Kind von v.
- (4b) `RKind`(v): Bestimme das rechte Kind von v.
- (4c) Sollte das entsprechende Kind nicht existieren, ist der Null-Zeiger als Antwort zu geben.

(5) `Tiefe`(v): Bestimme die Tiefe von v.

(6) `Höhe`(v): Bestimme die Höhe von v.

(7) `Baum`$(v, T_1, \ldots, T_m)$: Erzeuge einen geordneten Baum mit Wurzel v und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

(8) `Suche`(x): Bestimme alle Knoten mit Wert x.

Das Eltern-Array
(wenn nur Vorfahren interessieren)

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

$$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

$$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

Wenn $v = r$, dann setze $\text{Baum}[v] = 0$.

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

$$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

  Wenn $v = r$, dann setze $\text{Baum}[v] = 0$.

- Das Positive:
  + schnelle Bestimmung des Elternknotens (Zeit =

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

  $$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

  Wenn $v = r$, dann setze $\text{Baum}[v] = 0$.
- Das Positive:
  - \+ schnelle Bestimmung des Elternknotens (Zeit $= O(1)$)

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

  $$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

  Wenn $v = r$, dann setze $\text{Baum}[v] = 0$.
- Das Positive:
  - + schnelle Bestimmung des Elternknotens (Zeit $= O(1)$)
  - + und schnelle Bestimmung der Tiefe von v (Zeit $=$

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

  $$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

  Wenn $v = r$, dann setze $\text{Baum}[v] = 0$.

- Das Positive:
  - \+ schnelle Bestimmung des Elternknotens (Zeit $= O(1)$)
  - \+ und schnelle Bestimmung der Tiefe von v (Zeit $= O(\text{Tiefe}(v))$).

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

  $$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

  Wenn $v = r$, dann setze $\text{Baum}[v] = 0$.
- Das Positive:
  - + schnelle Bestimmung des Elternknotens (Zeit $= O(1)$)
  - + und schnelle Bestimmung der Tiefe von v (Zeit $= O(\text{Tiefe}(v))$).
  - + Minimaler Speicherplatzverbrauch:
    Bäume mit n Knoten benötigen Speicherplatz

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

  $$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

  Wenn $v = r$, dann setze $\text{Baum}[v] = 0$.
- Das Positive:
  - + schnelle Bestimmung des Elternknotens (Zeit $= O(1)$)
  - + und schnelle Bestimmung der Tiefe von v (Zeit $= O(\text{Tiefe}(v))$).
  - + Minimaler Speicherplatzverbrauch:
    Bäume mit n Knoten benötigen Speicherplatz n.

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

  $$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

  Wenn $v = r$, dann setze $\text{Baum}[v] = 0$.
- Das Positive:
  - + schnelle Bestimmung des Elternknotens (Zeit $= O(1)$)
  - + und schnelle Bestimmung der Tiefe von v (Zeit $= O(\text{Tiefe}(v))$).
  - + Minimaler Speicherplatzverbrauch:
    Bäume mit n Knoten benötigen Speicherplatz n.
- Das Negative:

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

  $$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

  Wenn $v = r$, dann setze $\text{Baum}[v] = 0$.
- Das Positive:
  - \+ schnelle Bestimmung des Elternknotens (Zeit $= O(1)$)
  - \+ und schnelle Bestimmung der Tiefe von v (Zeit $= O(\text{Tiefe}(v))$).
  - \+ Minimaler Speicherplatzverbrauch:
    Bäume mit n Knoten benötigen Speicherplatz n.
- Das Negative: für die Bestimmung der Kinder muss der gesamte Baum durchsucht werden (Zeit =

Das Eltern-Array

Annahme: Jeder Knoten besitzt eine Zahl aus $\{1, \ldots, n\}$ als Namen und zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau einen Knoten mit Namen i.

- Ein integer-Array **Baum** speichert für jeden Knoten v den Namen des Elternknotens von v:

$$\text{Baum}[v] = \text{Name des Elternknotens von } v.$$

  Wenn $v = r$, dann setze $\text{Baum}[v] = 0$.

- Das Positive:
  - \+ schnelle Bestimmung des Elternknotens (Zeit $= O(1)$)
  - \+ und schnelle Bestimmung der Tiefe von v (Zeit $= O(\text{Tiefe}(v))$).
  - \+ Minimaler Speicherplatzverbrauch:
    Bäume mit n Knoten benötigen Speicherplatz n.
- Das Negative: für die Bestimmung der Kinder muss der gesamte Baum durchsucht werden (Zeit = O(Anzahl Knoten).)

Die Binärbaum-Implementierung
(die ideale Datenstruktur für Binärbäume)

Die Binärbaum-Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
struct Knoten {
 int wert;
 Knoten *links, *rechts; };
```

dargestellt.

Die Binärbaum-Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
struct Knoten {
  int wert;
  Knoten *links, *rechts; };
```

dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,

Die Binärbaum-Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
struct Knoten {
 int wert;
 Knoten *links, *rechts; };
```

dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,
  - dann ist $z \rightarrow wert$ der *Wert* von v und

Die Binärbaum-Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
struct Knoten {
  int wert;
  Knoten *links, *rechts; };
```

dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,
  - dann ist $z \rightarrow wert$ der *Wert* von v und
  - $z \rightarrow links$ (bzw. $z \rightarrow rechts$) zeigt auf die Struktur des linken (bzw. rechten) Kindes von v.

Die Binärbaum-Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
struct Knoten {
 int wert;
 Knoten *links, *rechts; };
```

dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,
  - dann ist $z \rightarrow$ *wert* der *Wert* von v und
  - $z \rightarrow$ *links* (bzw. $z \rightarrow$ *rechts*) zeigt auf die Struktur des linken (bzw. rechten) Kindes von v.
  - Der Zeiger wurzel zeigt auf die Struktur der Wurzel des Baums.

Die Binärbaum-Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
struct Knoten {
 int wert;
 Knoten *links, *rechts; };
```

dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,
  - dann ist $z \rightarrow$ *wert* der *Wert* von v und
  - $z \rightarrow$ *links* (bzw. $z \rightarrow$ *rechts*) zeigt auf die Struktur des linken (bzw. rechten) Kindes von v.
  - Der Zeiger wurzel zeigt auf die Struktur der Wurzel des Baums.
- Speicherbedarf:

Die Binärbaum-Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
struct Knoten {
  int wert;
  Knoten *links, *rechts; };
```

dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,
  - dann ist $z \rightarrow wert$ der *Wert* von v und
  - $z \rightarrow links$ (bzw. $z \rightarrow rechts$) zeigt auf die Struktur des linken (bzw. rechten) Kindes von v.
  - Der Zeiger wurzel zeigt auf die Struktur der Wurzel des Baums.
- Speicherbedarf:
  - $2n$ Zeiger (zwei Zeiger pro Knoten) und
  - n Zellen (eine Zelle pro Knoten).

Die Binärbaum-Implementierung: Stärken und Schwächen

+ Die **Kinderbestimmung** gelingt schnellstmöglich, in Zeit

Die Binärbaum-Implementierung: Stärken und Schwächen

+ Die **Kinderbestimmung** gelingt schnellstmöglich, in Zeit $O(1)$.

Die Binärbaum-Implementierung: Stärken und Schwächen

+ Die **Kinderbestimmung** gelingt schnellstmöglich, in Zeit $O(1)$.
+ **Höhe** (v, T) wird angemessen unterstützt mit der Laufzeit

Die Binärbaum-Implementierung: Stärken und Schwächen

+ Die **Kinderbestimmung** gelingt schnellstmöglich, in Zeit $O(1)$.
+ **Höhe** (v, T) wird angemessen unterstützt mit der Laufzeit

$$O(\text{Anzahl der Knoten im Teilbaum mit Wurzel } v).$$

Die Binärbaum-Implementierung: Stärken und Schwächen

+ Die **Kinderbestimmung** gelingt schnellstmöglich, in Zeit $O(1)$.
+ **Höhe** (v, T) wird angemessen unterstützt mit der Laufzeit

$$O(\text{Anzahl der Knoten im Teilbaum mit Wurzel } v).$$

Begründung später.

Die Binärbaum-Implementierung: Stärken und Schwächen

+ Die **Kinderbestimmung** gelingt schnellstmöglich, in Zeit $O(1)$.
+ **Höhe** (v, T) wird angemessen unterstützt mit der Laufzeit

$$O(\text{Anzahl der Knoten im Teilbaum mit Wurzel } v).$$

Begründung später.

- Für die **Bestimmung des Elternknotens**

Die Binärbaum-Implementierung: Stärken und Schwächen

+ Die **Kinderbestimmung** gelingt schnellstmöglich, in Zeit $O(1)$.
+ **Höhe** (v, T) wird angemessen unterstützt mit der Laufzeit

$$O(\text{Anzahl der Knoten im Teilbaum mit Wurzel } v).$$

Begründung später.

- Für die **Bestimmung des Elternknotens** muss möglicherweise der gesamte Baum durchsucht werden!

Die Binärbaum-Implementierung: Stärken und Schwächen

+ Die **Kinderbestimmung** gelingt schnellstmöglich, in Zeit $O(1)$.
+ **Höhe** (v, T) wird angemessen unterstützt mit der Laufzeit

$$O(\text{Anzahl der Knoten im Teilbaum mit Wurzel } v).$$

Begründung später.

- Für die **Bestimmung des Elternknotens** muss möglicherweise der gesamte Baum durchsucht werden!
- Die **Bestimmung der Tiefe** ist

Die Binärbaum-Implementierung: Stärken und Schwächen

+ Die **Kinderbestimmung** gelingt schnellstmöglich, in Zeit $O(1)$.
+ **Höhe** (v, T) wird angemessen unterstützt mit der Laufzeit

$$O(\text{Anzahl der Knoten im Teilbaum mit Wurzel } v).$$

Begründung später.

- Für die **Bestimmung des Elternknotens** muss möglicherweise der gesamte Baum durchsucht werden!
- Die **Bestimmung der Tiefe** ist auch schwierig, da der Elternknoten nicht bekannt ist.

Die Kind-Geschwister Implementierung
(die Allzweckwaffe)

Die Kind-Geschwister Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
typedef struct Knoten {
 int wert;
 Knoten *LKind, *RGeschwister; };
```

dargestellt.

Die Kind-Geschwister Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
typedef struct Knoten {
 int wert;
 Knoten *LKind, *RGeschwister; };
```

dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,
  - dann ist $z \rightarrow wert$ der *Wert* von v und

Die Kind-Geschwister Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
typedef struct Knoten {
  int wert;
  Knoten *LKind, *RGeschwister; };
```

dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,
  - dann ist $z \to$ *wert* der *Wert* von v und
  - $z \to$ LKind (bzw. $z \to$ RGeschwister) zeigt auf die Struktur des linken Kindes, bzw. des rechten Geschwisterknotens von v.

Die Kind-Geschwister Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
typedef struct Knoten {
 int wert;
 Knoten *LKind, *RGeschwister; };
```

dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,
  - dann ist $z \rightarrow$ *wert* der *Wert* von v und
  - $z \rightarrow$ LKind (bzw. $z \rightarrow$ RGeschwister) zeigt auf die Struktur des linken Kindes, bzw. des rechten Geschwisterknotens von v.
  - Der Zeiger wurzel zeigt wieder auf die Struktur der Wurzel des Baums.

Die Kind-Geschwister Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

```
typedef struct Knoten {
 int wert;
 Knoten *LKind, *RGeschwister; };
```

dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,
  - dann ist $z \rightarrow$ *wert* der *Wert* von v und
  - $z \rightarrow$ LKind (bzw. $z \rightarrow$ RGeschwister) zeigt auf die Struktur des linken Kindes, bzw. des rechten Geschwisterknotens von v.
  - Der Zeiger wurzel zeigt wieder auf die Struktur der Wurzel des Baums.
- Im Vergleich zur Binärbaum-Darstellung:

Die Kind-Geschwister Implementierung

Ein Knoten wird durch die Struktur

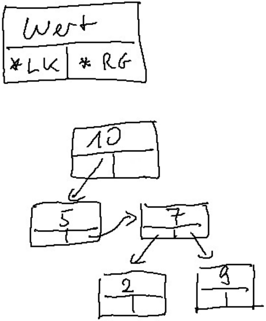
```
typedef struct Knoten {
  int wert;
  Knoten *LKind, *RGeschwister; };
```

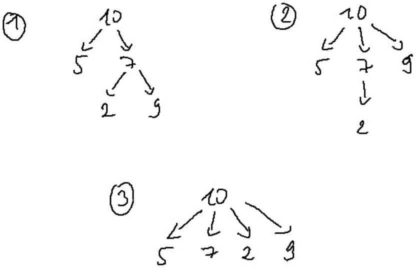
dargestellt.

- Wenn der Zeiger z auf die Struktur des Knotens v zeigt,
  - dann ist $z \rightarrow$ *wert* der *Wert* von v und
  - $z \rightarrow$ LKind (bzw. $z \rightarrow$ RGeschwister) zeigt auf die Struktur des linken Kindes, bzw. des rechten Geschwisterknotens von v.
  - Der Zeiger wurzel zeigt wieder auf die Struktur der Wurzel des Baums.
- Im Vergleich zur Binärbaum-Darstellung:
  - Ähnliches Laufzeitverhalten und ähnliche Speichereffizienz,
  - aber jetzt lassen sich alle Bäume und nicht nur Binärbäume darstellen!

Kind-Geschwister demogr.

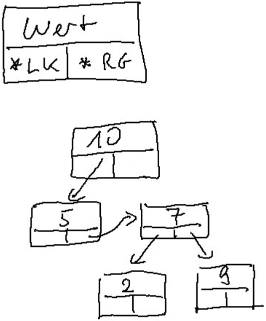
Welchem Baum entspricht die Datenstruktur?

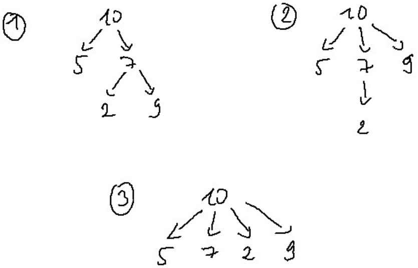




Kind-Geschwister demogr.

Welchem Baum entspricht die Datenstruktur?

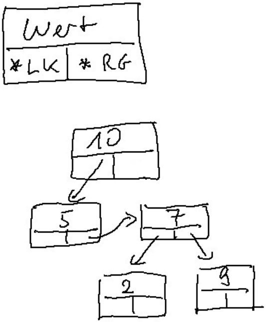




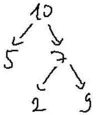
Auflösung:

Kind-Geschwister demogr.

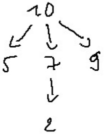
Welchem Baum entspricht die Datenstruktur?



(1)



(2)



(3)

Auflösung: (2)

Postorder, Präoder und Inorder

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**:

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander.

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**:

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**:

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**: Durchlaufe zuerst T_1 rekursiv,

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**: Durchlaufe zuerst T_1 rekursiv, sodann die Wurzel r

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**: Durchlaufe zuerst T_1 rekursiv, sodann die Wurzel r und letztlich die Teilbäume $T_2, \ldots, T_m$ rekursiv.

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**: Durchlaufe zuerst T_1 rekursiv, sodann die Wurzel r und letztlich die Teilbäume $T_2, \ldots, T_m$ rekursiv.

```
void praeorder (Knoten *p)
```

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**: Durchlaufe zuerst T_1 rekursiv, sodann die Wurzel r und letztlich die Teilbäume $T_2, \ldots, T_m$ rekursiv.

```
void praeorder (Knoten *p)
{
```

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**: Durchlaufe zuerst T_1 rekursiv, sodann die Wurzel r und letztlich die Teilbäume $T_2, \ldots, T_m$ rekursiv.

```
void praeorder (Knoten *p)
{
  if (p != nullptr)
```

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**: Durchlaufe zuerst T_1 rekursiv, sodann die Wurzel r und letztlich die Teilbäume $T_2, \ldots, T_m$ rekursiv.

```
void praeorder (Knoten *p)
{
  if (p != nullptr)
  { cout « p→ wert;
```

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**: Durchlaufe zuerst T_1 rekursiv, sodann die Wurzel r und letztlich die Teilbäume $T_2, \ldots, T_m$ rekursiv.

```
void praeorder (Knoten *p)
{
  if (p != nullptr)
  { cout « p→ wert;
    for ( Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
```

Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**: Durchlaufe zuerst T_1 rekursiv, sodann die Wurzel r und letztlich die Teilbäume $T_2, \ldots, T_m$ rekursiv.

```
void praeorder (Knoten *p)
{
  if (p != nullptr)
  { cout « p→ wert;
    for ( Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
      praeorder(q);
  }
}
```

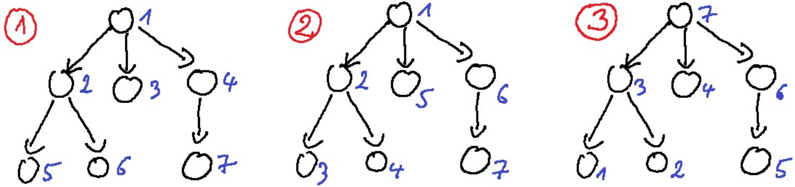
Suche in Bäumen: Postorder, Präorder und Inorder

Sei T ein geordneter Baum mit Wurzel r und Teilbäumen $T_1, \ldots, T_m$.

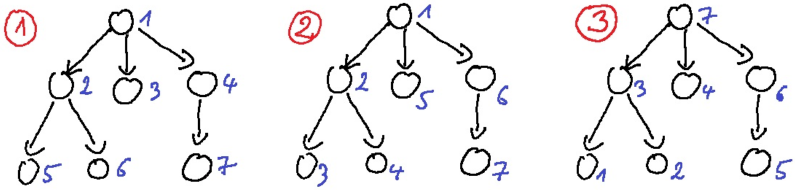
- **Postorder**: Durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$ nacheinander. Danach wird die Wurzel r besucht.
- **Präorder**: besuche zuerst r und danach durchlaufe rekursiv die Teilbäume $T_1, \ldots, T_m$.
- **Inorder**: Durchlaufe zuerst T_1 rekursiv, sodann die Wurzel r und letztlich die Teilbäume $T_2, \ldots, T_m$ rekursiv.

```
void praeorder (Knoten *p)
{
  if (p != nullptr)
  { cout << p→ wert;
    for ( Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
      praeorder(q);
  }
}
```

Welches ist eine Präorder-Traversierung?

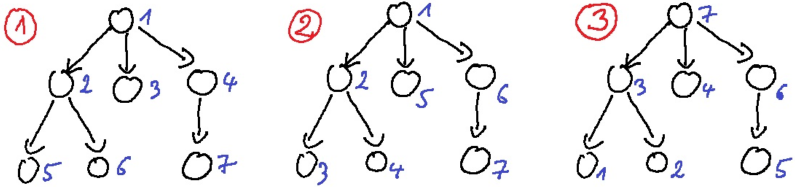


Welches ist eine Präorder-Traversierung?



Auflösung:

Welches ist eine Präorder-Traversierung?



Auflösung: (2)

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
  if (p != nullptr)
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
  if (p != nullptr)
  { p→tiefe = t;
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
   if (p != nullptr)
   { p→tiefe = t;
     for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
   if (p != nullptr)
   { p→tiefe = t;
    for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
        tiefe(q,t);}}
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
   if (p != nullptr)
   { p→tiefe = t;
    for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
          tiefe(q,t);}}

void hoehe (Knoten *p)
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
   if (p != nullptr)
   { p→tiefe = t;
    for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
          tiefe(q,t);}}

void hoehe (Knoten *p)
{ int h=-1;
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
  if (p != nullptr)
  { p→tiefe = t;
    for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
        tiefe(q,t);}}

void hoehe (Knoten *p)
{ int h=-1;
  if (p != nullptr)
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
   if (p != nullptr)
   { p→tiefe = t;
    for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
         tiefe(q,t);}}

void hoehe (Knoten *p)
{ int h=-1;
   if (p != nullptr)
   { for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
   if (p != nullptr)
   { p→tiefe = t;
    for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
         tiefe(q,t);}}

void hoehe (Knoten *p)
{ int h=-1;
   if (p != nullptr)
   { for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
     { hoehe (q); h = max ( h, q → hoehe); }
```

Bestimmung der Tiefe und Höhe von Knoten

Die Struktur eines Knoten besteht aus den Feldern

tiefe, hoehe, wert, LKind und RGeschwister.

```
tiefe(wurzel,-1);
void tiefe (Knoten *p, int t)
{ t = t+1;
  if (p != nullptr)
  { p→tiefe = t;
   for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
       tiefe(q,t);}}

void hoehe (Knoten *p)
{ int h=-1;
  if (p != nullptr)
  { for (Knoten *q=p→LKind; q != nullptr; q=q→RGeschwister)
    { hoehe (q); h = max ( h, q → hoehe); }
    p→hoehe = h+1; } }
```

Eine nicht-rekursive Präorder-Implementierung

Der Teilbaum mit Wurzel v ist in Präorder-Reihenfolge zu durchlaufen.

Eine nicht-rekursive Präorder-Implementierung

Der Teilbaum mit Wurzel v ist in Präorder-Reihenfolge zu durchlaufen.

(1) Wir fügen einen Zeiger auf die Struktur von v in einen anfänglich leeren Stack ein.

Eine nicht-rekursive Präorder-Implementierung

Der Teilbaum mit Wurzel v ist in Präorder-Reihenfolge zu durchlaufen.

(1) Wir fügen einen Zeiger auf die Struktur von v in einen anfänglich leeren Stack ein.

(2) Solange der Stack nicht-leer ist, wiederhole:

Eine nicht-rekursive Präorder-Implementierung

Der Teilbaum mit Wurzel v ist in Präorder-Reihenfolge zu durchlaufen.

(1) Wir fügen einen Zeiger auf die Struktur von v in einen anfänglich leeren Stack ein.

(2) Solange der Stack nicht-leer ist, wiederhole:

   (a) Entferne das zuoberst liegende Stack-Element w mit Hilfe der Pop-Operation.
   $/*$ w wird besucht. $*/$

Eine nicht-rekursive Präorder-Implementierung

Der Teilbaum mit Wurzel v ist in Präorder-Reihenfolge zu durchlaufen.

(1) Wir fügen einen Zeiger auf die Struktur von v in einen anfänglich leeren Stack ein.

(2) Solange der Stack nicht-leer ist, wiederhole:

   (a) Entferne das zuoberst liegende Stack-Element w mit Hilfe der Pop-Operation.
   /$*$ w wird besucht. $*$/

   (b) Die Kinder von w werden

Eine nicht-rekursive Präorder-Implementierung

Der Teilbaum mit Wurzel v ist in Präorder-Reihenfolge zu durchlaufen.

(1) Wir fügen einen Zeiger auf die Struktur von v in einen anfänglich leeren Stack ein.

(2) Solange der Stack nicht-leer ist, wiederhole:

   (a) Entferne das zuoberst liegende Stack-Element w mit Hilfe der Pop-Operation.
   /∗ w wird besucht. ∗ /

   (b) Die Kinder von w werden in umgekehrter Reihenfolge in den Stack eingefügt.
   /∗ Durch die Umkehrung der Reihenfolge werden die Bäume später in ihrer natürlichen Reihenfolge abgearbeitet. ∗ /

Eine nicht-rekursive Präorder-Implementierung

Der Teilbaum mit Wurzel v ist in Präorder-Reihenfolge zu durchlaufen.

(1) Wir fügen einen Zeiger auf die Struktur von v in einen anfänglich leeren Stack ein.

(2) Solange der Stack nicht-leer ist, wiederhole:

  (a) Entferne das zuoberst liegende Stack-Element w mit Hilfe der Pop-Operation.
  $/*$ w wird besucht. $*/$

  (b) Die Kinder von w werden in umgekehrter Reihenfolge in den Stack eingefügt.
  $/*$ Durch die Umkehrung der Reihenfolge werden die Bäume später in ihrer natürlichen Reihenfolge abgearbeitet. $*/$

Die Laufzeit ist linear in der Knotenzahl n. Warum?

Eine nicht-rekursive Präorder-Implementierung

Der Teilbaum mit Wurzel v ist in Präorder-Reihenfolge zu durchlaufen.

(1) Wir fügen einen Zeiger auf die Struktur von v in einen anfänglich leeren Stack ein.

(2) Solange der Stack nicht-leer ist, wiederhole:

   (a) Entferne das zuoberst liegende Stack-Element w mit Hilfe der Pop-Operation.
   /$*$ w wird besucht. $*$/

   (b) Die Kinder von w werden in umgekehrter Reihenfolge in den Stack eingefügt.
   /$*$ Durch die Umkehrung der Reihenfolge werden die Bäume später in ihrer natürlichen Reihenfolge abgearbeitet. $*$/

Die Laufzeit ist linear in der Knotenzahl n. Warum?

- Jeder Knoten wird genau einmal in den Stack eingefügt.

Eine nicht-rekursive Präorder-Implementierung

Der Teilbaum mit Wurzel v ist in Präorder-Reihenfolge zu durchlaufen.

(1) Wir fügen einen Zeiger auf die Struktur von v in einen anfänglich leeren Stack ein.

(2) Solange der Stack nicht-leer ist, wiederhole:

   (a) Entferne das zuoberst liegende Stack-Element w mit Hilfe der Pop-Operation.
   /$*$ w wird besucht. $*$ /

   (b) Die Kinder von w werden in umgekehrter Reihenfolge in den Stack eingefügt.
   /$*$ Durch die Umkehrung der Reihenfolge werden die Bäume später in ihrer natürlichen Reihenfolge abgearbeitet. $*$ /

Die Laufzeit ist linear in der Knotenzahl n. Warum?

- Jeder Knoten wird genau einmal in den Stack eingefügt.
- Insgesamt werden also höchstens $O(n)$ Stackoperationen durchgeführt.

Eine nicht-rekursive Präorder-Implementierung

Der Teilbaum mit Wurzel v ist in Präorder-Reihenfolge zu durchlaufen.

(1) Wir fügen einen Zeiger auf die Struktur von v in einen anfänglich leeren Stack ein.

(2) Solange der Stack nicht-leer ist, wiederhole:

   (a) Entferne das zuoberst liegende Stack-Element w mit Hilfe der Pop-Operation.
   /* w wird besucht. */

   (b) Die Kinder von w werden in umgekehrter Reihenfolge in den Stack eingefügt.
   /* Durch die Umkehrung der Reihenfolge werden die Bäume später in ihrer natürlichen Reihenfolge abgearbeitet. */

Die Laufzeit ist linear in der Knotenzahl n. Warum?

- Jeder Knoten wird genau einmal in den Stack eingefügt.
- Insgesamt werden also höchstens $O(n)$ Stackoperationen durchgeführt. Stackoperationen dominieren aber die Laufzeit.

Welcher Knoten wird direkt nach v besucht?

- **Postorder**:

Welcher Knoten wird direkt nach v besucht?

- **Postorder**:
  - Das linkeste Blatt im Baum des rechten Geschwisterknotens.

Welcher Knoten wird direkt nach v besucht?

- **Postorder**:
  - Das linkeste Blatt im Baum des rechten Geschwisterknotens.
  - Wenn v keinen rechten Geschwisterknoten besitzt, dann wird

Welcher Knoten wird direkt nach v besucht?

- **Postorder**:
  - Das linkeste Blatt im Baum des rechten Geschwisterknotens.
  - Wenn v keinen rechten Geschwisterknoten besitzt, dann wird der Elternknoten von v als nächster besucht.

Welcher Knoten wird direkt nach v besucht?

- **Postorder**:
  - Das linkeste Blatt im Baum des rechten Geschwisterknotens.
  - Wenn v keinen rechten Geschwisterknoten besitzt, dann wird der Elternknoten von v als nächster besucht.
- **Präorder**:

Welcher Knoten wird direkt nach v besucht?

- **Postorder**:
  - Das linkeste Blatt im Baum des rechten Geschwisterknotens.
  - Wenn v keinen rechten Geschwisterknoten besitzt, dann wird der Elternknoten von v als nächster besucht.
- **Präorder**:
  - Das linkeste Kind von v, wenn v kein Blatt ist.

Welcher Knoten wird direkt nach v besucht?

- **Postorder**:
  - Das linkeste Blatt im Baum des rechten Geschwisterknotens.
  - Wenn v keinen rechten Geschwisterknoten besitzt, dann wird der Elternknoten von v als nächster besucht.
- **Präorder**:
  - Das linkeste Kind von v, wenn v kein Blatt ist.
  - Wenn v ein Blatt ist, dann das

Welcher Knoten wird direkt nach v besucht?

- **Postorder**:
  - Das linkeste Blatt im Baum des rechten Geschwisterknotens.
  - Wenn v keinen rechten Geschwisterknoten besitzt, dann wird der Elternknoten von v als nächster besucht.
- **Präorder**:
  - Das linkeste Kind von v, wenn v kein Blatt ist.
  - Wenn v ein Blatt ist, dann das erste nicht-besuchte Kind des tiefsten, nicht vollständig durchsuchten Vorfahren von v.

Prioritätswarteschlangen und Heaps

Prioritätswarteschlangen

Der abstrakte Datentyp „**Prioritätswarteschlange**“: Füge Elemente (mit Prioritäten) ein und entferne jeweils das Element höchster Priorität.

Prioritätswarteschlangen

Der abstrakte Datentyp „**Prioritätswarteschlange**“: Füge Elemente (mit Prioritäten) ein und entferne jeweils das Element höchster Priorität.

- Eine Schlange ist eine sehr spezielle Prioritätswarteschlange:
  - Die Priorität eines Elements richtet sich nach dem Zeitpunkt des Einfügens.

Prioritätswarteschlangen

Der abstrakte Datentyp „**Prioritätswarteschlange**“: Füge Elemente (mit Prioritäten) ein und entferne jeweils das Element höchster Priorität.

- Eine Schlange ist eine sehr spezielle Prioritätswarteschlange:
  - Die Priorität eines Elements richtet sich nach dem Zeitpunkt des Einfügens.
- Der abstrakte Datentyp „Prioritätswarteschlange“ umfasst die Operationen
  - **insert**(x,Priorität),

Prioritätswarteschlangen

Der abstrakte Datentyp „**Prioritätswarteschlange**“: Füge Elemente (mit Prioritäten) ein und entferne jeweils das Element höchster Priorität.

- Eine Schlange ist eine sehr spezielle Prioritätswarteschlange:
  - Die Priorität eines Elements richtet sich nach dem Zeitpunkt des Einfügens.
- Der abstrakte Datentyp „Prioritätswarteschlange“ umfasst die Operationen
  - **insert**(x,Priorität),
  - **delete**_max(),

Prioritätswarteschlangen

Der abstrakte Datentyp „**Prioritätswarteschlange**“: Füge Elemente (mit Prioritäten) ein und entferne jeweils das Element höchster Priorität.

- Eine Schlange ist eine sehr spezielle Prioritätswarteschlange:
  - Die Priorität eines Elements richtet sich nach dem Zeitpunkt des Einfügens.
- Der abstrakte Datentyp „Prioritätswarteschlange“ umfasst die Operationen
  - **insert**(x,Priorität),
  - **delete**_max(),
  - **change_priority**(wo,Priorität*), wähle Priorität* als neue Priorität

Prioritätswarteschlangen

Der abstrakte Datentyp „**Prioritätswarteschlange**“: Füge Elemente (mit Prioritäten) ein und entferne jeweils das Element höchster Priorität.

- Eine Schlange ist eine sehr spezielle Prioritätswarteschlange:
  - Die Priorität eines Elements richtet sich nach dem Zeitpunkt des Einfügens.
- Der abstrakte Datentyp „Prioritätswarteschlange“ umfasst die Operationen
  - **insert**(x,Priorität),
  - **delete**_max(),
  - **change_priority**(wo,Priorität*), wähle Priorität* als neue Priorität
  - und **remove**(wo), entferne das durch wo beschriebene Element.

Prioritätswarteschlangen

Der abstrakte Datentyp „**Prioritätswarteschlange**“: Füge Elemente (mit Prioritäten) ein und entferne jeweils das Element höchster Priorität.

- Eine Schlange ist eine sehr spezielle Prioritätswarteschlange:
  - Die Priorität eines Elements richtet sich nach dem Zeitpunkt des Einfügens.
- Der abstrakte Datentyp „Prioritätswarteschlange“ umfasst die Operationen
  - **insert**(x,Priorität),
  - **delete**_max(),
  - **change_priority**(wo,Priorität*), wähle Priorität* als neue Priorität
  - und **remove**(wo), entferne das durch wo beschriebene Element.

Wir entwerfen eine geeignete Datenstruktur.

Der Heap

Ein Heap ist ein Binärbaum mit

Heap-Struktur,

der Prioritäten gemäß einer

Heap-Ordnung

abspeichert.

Der Heap

Ein Heap ist ein Binärbaum mit

Heap-Struktur,

der Prioritäten gemäß einer

Heap-Ordnung

abspeichert.

Ein Binärbaum T der Tiefe t hat **Heapstruktur**, wenn:

Der Heap

Ein Heap ist ein Binärbaum mit

Heap-Struktur,

der Prioritäten gemäß einer

Heap-Ordnung

abspeichert.

Ein Binärbaum T der Tiefe t hat **Heapstruktur**, wenn:

(a) jeder Knoten der Tiefe höchstens $t - 2$ genau 2 Kinder hat,

Der Heap

Ein Heap ist ein Binärbaum mit

Heap-Struktur,

der Prioritäten gemäß einer

Heap-Ordnung

abspeichert.

Ein Binärbaum T der Tiefe t hat **Heapstruktur**, wenn:

(a) jeder Knoten der Tiefe höchstens $t-2$ genau 2 Kinder hat,

(b) für jeden Knoten v der Tiefe $t-1$ mit weniger als 2 Kindern alle Knoten der Tiefe $t-1$, die rechts von v liegen, keine Kinder haben, und

Der Heap

Ein Heap ist ein Binärbaum mit

Heap-Struktur,

der Prioritäten gemäß einer

Heap-Ordnung

abspeichert.

Ein Binärbaum T der Tiefe t hat **Heapstruktur**, wenn:

(a) jeder Knoten der Tiefe höchstens $t - 2$ genau 2 Kinder hat,

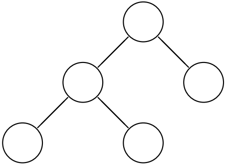
(b) für jeden Knoten v der Tiefe $t - 1$ mit weniger als 2 Kindern alle Knoten der Tiefe $t - 1$, die rechts von v liegen, keine Kinder haben, und

(c) falls ein Knoten v der Tiefe $t - 1$ genau ein Kind hat, dieses Kind ein linkes Kind ist.

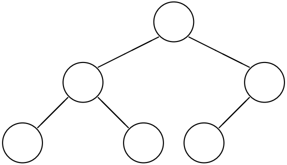
Ein Binärbaum mit Heapstruktur ist ein fast vollständiger binärer Baum: Ist v ein Knoten mit nur einem Kind, so haben alle Knoten links von v zwei Kinder, und alle Knoten rechts von v haben keine Kinder.

Heapstruktur multiple choice

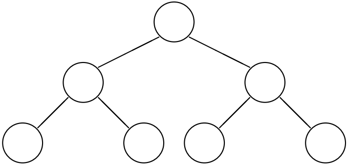
(1)



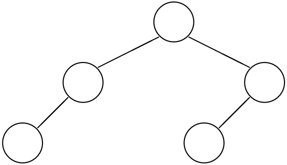
(2)



(3)



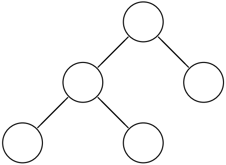
(4)



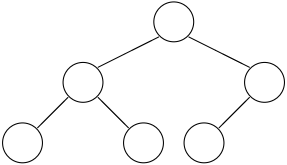
Welcher Baum hat keine Heap-Struktur?

Heapstruktur multiple choice

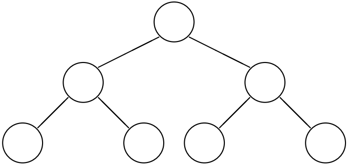
(1)



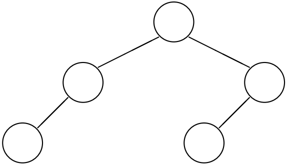
(2)



(3)



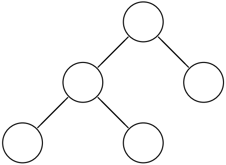
(4)



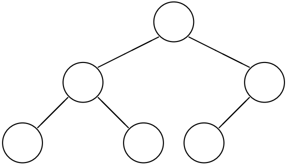
Welcher Baum hat keine Heap-Struktur?

Auflösung:

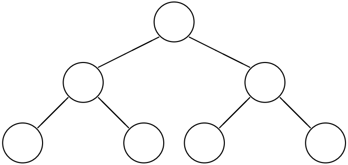
(1)



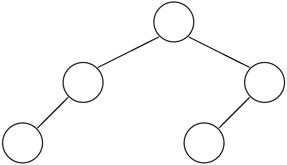
(2)



(3)



(4)



Welcher Baum hat keine Heap-Struktur?

Auflösung: (4)

Heapordnung für Max-Heaps

Ein geordneter binärer Baum T mit Heap-Struktur speichere für jeden Knoten v die Priorität $\mathbf{p(v)}$ von v. Dann hat T

Heap-Ordnung,

falls

$$\mathbf{p(v)} \geq \mathbf{p(w)}$$

für jeden Knoten v und für jedes Kind w von v gilt.

Heapordnung für Max-Heaps

Ein geordneter binärer Baum T mit Heap-Struktur speichere für jeden Knoten v die Priorität $\mathbf{p}(\mathbf{v})$ von v. Dann hat T

Heap-Ordnung,

falls

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}) \geq \mathbf{p}(\mathbf{w})$$

für jeden Knoten v und für jedes Kind w von v gilt.

- Die höchste Priorität wird stets an der Wurzel gespeichert.

Heapordnung für Max-Heaps

Ein geordneter binärer Baum T mit Heap-Struktur speichere für jeden Knoten v die Priorität $\mathbf{p(v)}$ von v. Dann hat T

Heap-Ordnung,

falls

$$\mathbf{p(v)} \geq \mathbf{p(w)}$$

für jeden Knoten v und für jedes Kind w von v gilt.

- Die höchste Priorität wird stets an der Wurzel gespeichert.
- Wie sollte man einen Baum mit Heap-Struktur implementieren?

Heapordnung für Max-Heaps

Ein geordneter binärer Baum T mit Heap-Struktur speichere für jeden Knoten v die Priorität $\mathbf{p}(\mathbf{v})$ von v. Dann hat T

Heap-Ordnung,

falls

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}) \geq \mathbf{p}(\mathbf{w})$$

für jeden Knoten v und für jedes Kind w von v gilt.

- Die höchste Priorität wird stets an der Wurzel gespeichert.
- Wie sollte man einen Baum mit Heap-Struktur implementieren? Wir arbeiten mit einem Array.

Der Heap

Die Datenstruktur Heap

Der geordnete binäre Baum T habe **Heap-Struktur** und **Heap-Ordnung**.

Das Array H ist ein **Heap** für T, wenn

- $H[1] = p(r)$ für die Wurzel r von T und
- wenn $H[i]$ die Priorität des Knotens v von T speichert, dann gilt
  - $\mathbf{H[2 \cdot i] = p(v_L)}$ für das linke Kind v_L von v

Die Datenstruktur Heap

Der geordnete binäre Baum T habe **Heap-Struktur** und **Heap-Ordnung**.

Das Array H ist ein **Heap** für T, wenn

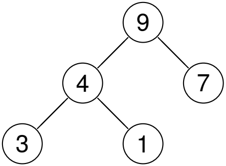
- $H[1] = p(r)$ für die Wurzel r von T und
- wenn $H[i]$ die Priorität des Knotens v von T speichert, dann gilt
  - $\mathbf{H[2 \cdot i] = p(v_L)}$ für das linke Kind v_L von v und
  - $\mathbf{H[2 \cdot i + 1] = p(v_R)}$ für das rechte Kind v_R.

Die Datenstruktur Heap

Der geordnete binäre Baum T habe **Heap-Struktur** und **Heap-Ordnung**.

Das Array H ist ein **Heap** für T, wenn

- $H[1] = p(r)$ für die Wurzel r von T und
- wenn $H[i]$ die Priorität des Knotens v von T speichert, dann gilt
  - $\mathbf{H[2 \cdot i] = p(v_L)}$ für das linke Kind v_L von v und
  - $\mathbf{H[2 \cdot i + 1] = p(v_R)}$ für das rechte Kind v_R.

Zum Beispiel besitzt  den Heap

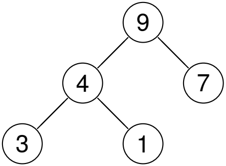
Die Datenstruktur Heap

Der geordnete binäre Baum T habe **Heap-Struktur** und **Heap-Ordnung**.

Das Array H ist ein **Heap** für T, wenn

- $H[1] = p(r)$ für die Wurzel r von T und
- wenn $H[i]$ die Priorität des Knotens v von T speichert, dann gilt
  - $\mathbf{H[2 \cdot i] = p(v_L)}$ für das linke Kind v_L von v und
  - $\mathbf{H[2 \cdot i + 1] = p(v_R)}$ für das rechte Kind v_R.

Zum Beispiel besitzt



den Heap (9,

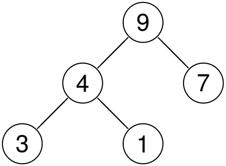
Die Datenstruktur Heap

Der geordnete binäre Baum T habe **Heap-Struktur** und **Heap-Ordnung**.

Das Array H ist ein **Heap** für T, wenn

- $H[1] = p(r)$ für die Wurzel r von T und
- wenn $H[i]$ die Priorität des Knotens v von T speichert, dann gilt
  - $\mathbf{H[2 \cdot i] = p(v_L)}$ für das linke Kind v_L von v und
  - $\mathbf{H[2 \cdot i + 1] = p(v_R)}$ für das rechte Kind v_R.

Zum Beispiel besitzt



den Heap $(9, 4,$

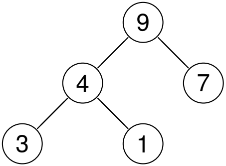
Die Datenstruktur Heap

Der geordnete binäre Baum T habe **Heap-Struktur** und **Heap-Ordnung**.

Das Array H ist ein **Heap** für T, wenn

- $H[1] = p(r)$ für die Wurzel r von T und
- wenn $H[i]$ die Priorität des Knotens v von T speichert, dann gilt
  - $\mathbf{H[2 \cdot i] = p(v_L)}$ für das linke Kind v_L von v und
  - $\mathbf{H[2 \cdot i + 1] = p(v_R)}$ für das rechte Kind v_R.

Zum Beispiel besitzt



den Heap $(9, 4, 7,$

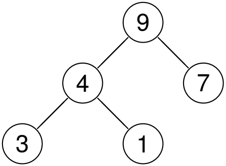
Die Datenstruktur Heap

Der geordnete binäre Baum T habe **Heap-Struktur** und **Heap-Ordnung**.

Das Array H ist ein **Heap** für T, wenn

- $H[1] = p(r)$ für die Wurzel r von T und
- wenn $H[i]$ die Priorität des Knotens v von T speichert, dann gilt
  - $\mathbf{H[2 \cdot i] = p(v_L)}$ für das linke Kind v_L von v und
  - $\mathbf{H[2 \cdot i + 1] = p(v_R)}$ für das rechte Kind v_R.

Zum Beispiel besitzt



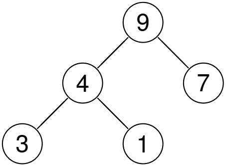
den Heap $(9, 4, 7, 3,$

Die Datenstruktur Heap

Der geordnete binäre Baum T habe **Heap-Struktur** und **Heap-Ordnung**.

Das Array H ist ein **Heap** für T, wenn

- $H[1] = p(r)$ für die Wurzel r von T und
- wenn $H[i]$ die Priorität des Knotens v von T speichert, dann gilt
  - $\mathbf{H[2 \cdot i] = p(v_L)}$ für das linke Kind v_L von v und
  - $\mathbf{H[2 \cdot i + 1] = p(v_R)}$ für das rechte Kind v_R.

Zum Beispiel besitzt  den Heap $(9, 4, 7, 3, 1)$.

Die Funktion Insert

Wie navigiert man in einem Heap H?

- Wenn Knoten v in Position i gespeichert ist, dann ist
  - das linke Kind v_L in Position

Die Funktion Insert

Wie **navigiert** man in einem Heap H?

- Wenn Knoten v in Position i gespeichert ist, dann ist
  - das linke Kind v_L in Position $2 \cdot i$,
  - das rechte Kind v_R in Position

Die Funktion Insert

Wie navigiert man in einem Heap H?

- Wenn Knoten v in Position i gespeichert ist, dann ist
  - das linke Kind v_L in Position $2 \cdot i$,
  - das rechte Kind v_R in Position $2 \cdot i + 1$ und
  - der Elternknoten von v in Position

Die Funktion Insert

Wie **navigiert** man in einem Heap H?

- Wenn Knoten v in Position i gespeichert ist, dann ist
  - das linke Kind v_L in Position $2 \cdot i$,
  - das rechte Kind v_R in Position $2 \cdot i + 1$ und
  - der Elternknoten von v in Position $\lfloor i/2 \rfloor$

  gespeichert.

Die Funktion Insert

Wie navigiert man in einem Heap H?

- Wenn Knoten v in Position i gespeichert ist, dann ist
  - das linke Kind v_L in Position $2 \cdot i$,
  - das rechte Kind v_R in Position $2 \cdot i + 1$ und
  - der Elternknoten von v in Position $\lfloor i/2 \rfloor$

  gespeichert.

Wo sollten wir eine neue Priorität p einfügen?

- Es liegt nahe,

Die Funktion Insert

Wie navigiert man in einem Heap H?

- Wenn Knoten v in Position i gespeichert ist, dann ist
  - das linke Kind v_L in Position $2 \cdot i$,
  - das rechte Kind v_R in Position $2 \cdot i + 1$ und
  - der Elternknoten von v in Position $\lfloor i/2 \rfloor$

  gespeichert.

Wo sollten wir eine neue Priorität p einfügen?

- Es liegt nahe, p auf der ersten freien Position abzulegen. Wir setzen also

$$H[++n] = p.$$

Die Funktion Insert

Wie navigiert man in einem Heap H?

- Wenn Knoten v in Position i gespeichert ist, dann ist
  - das linke Kind v_L in Position $2 \cdot i$,
  - das rechte Kind v_R in Position $2 \cdot i + 1$ und
  - der Elternknoten von v in Position $\lfloor i/2 \rfloor$

  gespeichert.

Wo sollten wir eine neue Priorität p einfügen?

- Es liegt nahe, p auf der ersten freien Position abzulegen. Wir setzen also

$$H[++n] = p.$$

  - Der neue Baum hat Heap-Struktur, aber die Heap-Ordnung ist möglicherweise verletzt.

Die Funktion Insert

Wie navigiert man in einem Heap H?

- Wenn Knoten v in Position i gespeichert ist, dann ist
  - das linke Kind v_L in Position $2 \cdot i$,
  - das rechte Kind v_R in Position $2 \cdot i + 1$ und
  - der Elternknoten von v in Position $\lfloor i/2 \rfloor$

  gespeichert.

Wo sollten wir eine neue Priorität p einfügen?

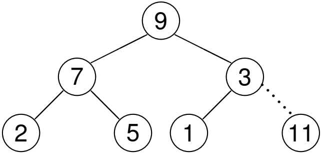
- Es liegt nahe, p auf der ersten freien Position abzulegen. Wir setzen also

$$H[++n] = p.$$

  - Der neue Baum hat Heap-Struktur, aber die Heap-Ordnung ist möglicherweise verletzt.

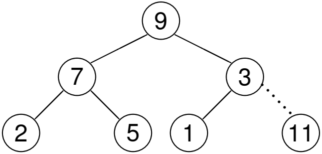
Wie kann die Heap-Ordnung kostengünstig repariert werden?

Wir fügen die Priorität 11 ein

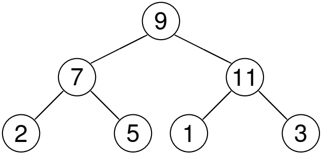


Die Heap-Ordnung ist verletzt und 11 rutscht nach oben:

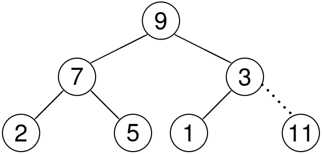
Wir fügen die Priorität 11 ein



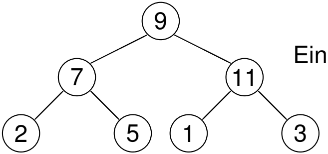
Die Heap-Ordnung ist verletzt und 11 rutscht nach oben:



Wir fügen die Priorität 11 ein



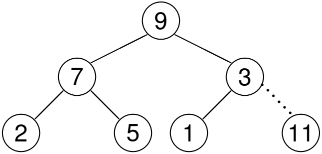
Die Heap-Ordnung ist verletzt und 11 rutscht nach oben:



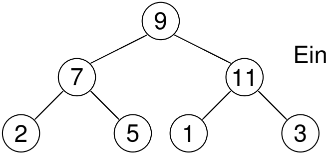
Ein weiterer Vertauschungsschritt repariert die

Heap-Ordnung

Wir fügen die Priorität 11 ein

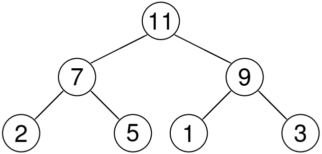


Die Heap-Ordnung ist verletzt und 11 rutscht nach oben:



Ein weiterer Vertauschungsschritt repariert die

Heap-Ordnung



Repair_up

Die Repair_up Prozedur

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_up**.

Die Repair_up Prozedur

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_up**.

```
void heap::repair_up (int wo)
```

Die Repair_up Prozedur

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_up**.

```
void heap::repair_up (int wo)
  {int p = H[wo];
```

Die Repair_up Prozedur

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_up**.

```
void heap::repair_up (int wo)
  {int p = H[wo];
  while ((wo > 1) && (H[wo/2] < p))
```

Die Repair_up Prozedur

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_up**.

```
void heap::repair_up (int wo)
  {int p = H[wo];
  while ((wo > 1) && (H[wo/2] < p))
      {H[wo] = H[wo/2];
```

Die Repair_up Prozedur

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_up**.

```
void heap::repair_up (int wo)
  {int p = H[wo];
  while ((wo > 1) && (H[wo/2] < p))
      {H[wo] = H[wo/2];
      wo = wo/2; }
```

Die Repair_up Prozedur

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_up**.

```
void heap::repair_up (int wo)
  {int p = H[wo];
  while ((wo > 1) && (H[wo/2] < p))
      {H[wo] = H[wo/2];
      wo = wo/2; }
  H[wo] = p;}
```

Die Repair_up Prozedur

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_up**.

```
void heap::repair_up (int wo)
  {int p = H[wo];
  while ((wo > 1) && (H[wo/2] < p))
      {H[wo] = H[wo/2];
      wo = wo/2; }
  H[wo] = p;}
```

- Wir verschieben die Priorität solange nach oben, bis

Die Repair_up Prozedur

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_up**.

```
void heap::repair_up (int wo)
  {int p = H[wo];
  while ((wo > 1) && (H[wo/2] < p))
      {H[wo] = H[wo/2];
      wo = wo/2; }
  H[wo] = p;}
```

- Wir verschieben die Priorität solange nach oben, bis
  - entweder die Priorität des Elternknotens mindestens so groß ist
  - oder wir die Wurzel erreicht haben.
- Wie groß ist der Aufwand?

Aufwand von Repair_up demogr.

Gegeben sei ein Heap mit n Elementen und Tiefe $t(n)$.

Dann benötigt Repair_up im Worst-Case die Zeit

- (1) $\Theta(1)$
- (2) $\Theta(\log t(n))$
- (3) $\Theta(\log \log n)$
- (4) $\Theta(t(n))$
- (5) $\Theta(\log^5 n + t(n))$
- (6) $\Theta(n + t(n))$

Aufwand von Repair_up demogr.

Gegeben sei ein Heap mit n Elementen und Tiefe $t(n)$.

Dann benötigt Repair_up im Worst-Case die Zeit

- (1) $\Theta(1)$
- (2) $\Theta(\log t(n))$
- (3) $\Theta(\log \log n)$
- (4) $\Theta(t(n))$
- (5) $\Theta(\log^5 n + t(n))$
- (6) $\Theta(n + t(n))$

Auflösung:

Aufwand von Repair_up demogr.

Gegeben sei ein Heap mit n Elementen und Tiefe $t(n)$.

Dann benötigt Repair_up im Worst-Case die Zeit

- (1) $\Theta(1)$
- (2) $\Theta(\log t(n))$
- (3) $\Theta(\log \log n)$
- (4) $\Theta(t(n))$
- (5) $\Theta(\log^5 n + t(n))$
- (6) $\Theta(n + t(n))$

Auflösung: (4) $\Theta(t(n))$

Die Funktion Delete_max()

H repräsentiere einen Heap mit *n* Prioritäten. Für Delete_max:

1. Überschreibe die Wurzel mit

Die Funktion Delete_max()

H repräsentiere einen Heap mit *n* Prioritäten. Für Delete_max:

1. Überschreibe die Wurzel mit $H[n]$
2. und verringere n um 1.

Die Funktion Delete_max()

H repräsentiere einen Heap mit n Prioritäten. Für Delete_max:

1. Überschreibe die Wurzel mit $H[n]$
2. und verringere n um 1.

- Durch das Überschreiben mit $H(n)$ ist das entstandene Loch an der Wurzel verschwunden:

  Die Heap-Struktur ist wiederhergestellt.

Die Funktion Delete_max()

H repräsentiere einen Heap mit n Prioritäten. Für Delete_max:

1. Überschreibe die Wurzel mit $H[n]$
2. und verringere n um 1.

- Durch das Überschreiben mit $H(n)$ ist das entstandene Loch an der Wurzel verschwunden:

  Die Heap-Struktur ist wiederhergestellt.

- Allerdings ist die Heap-Ordnung möglicherweise verletzt und muss repariert werden.

Die Funktion Delete_max()

H repräsentiere einen Heap mit n Prioritäten. Für Delete_max:

1. Überschreibe die Wurzel mit $H[n]$
2. und verringere n um 1.

- Durch das Überschreiben mit $H(n)$ ist das entstandene Loch an der Wurzel verschwunden:

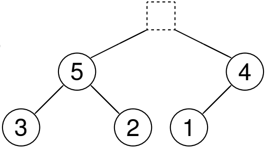
  Die Heap-Struktur ist wiederhergestellt.

- Allerdings ist die Heap-Ordnung möglicherweise verletzt und muss repariert werden.

  Die Prozedur **repair_up** versagt: sie ist nur anwendbar, wenn die falsch stehende Priorität größer als die Eltern-Priorität ist.

Ein Beispiel

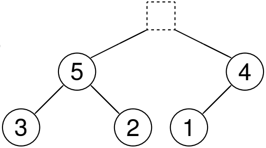
Vorher



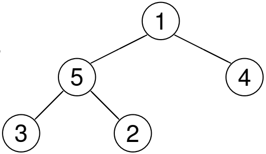
und nachher

Ein Beispiel

Vorher

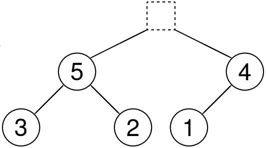


und nachher

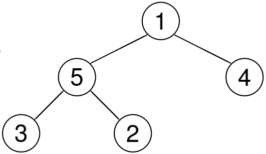


Ein Beispiel

Vorher



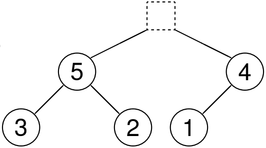
und nachher



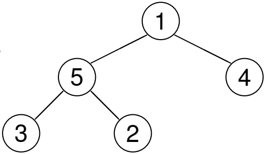
Repariere die Heap-Ordnung: Vertausche mit

Ein Beispiel

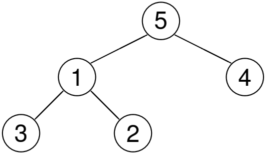
Vorher



und nachher



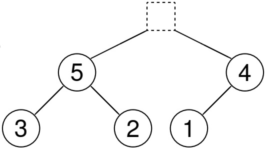
Repariere die Heap-Ordnung: Vertausche mit dem **größtem** Kind



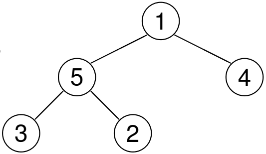
und wiederhole

Ein Beispiel

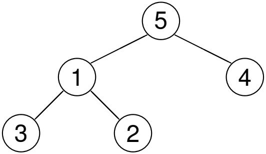
Vorher



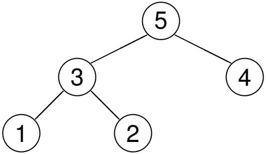
und nachher



Repariere die Heap-Ordnung: Vertausche mit dem **größtem** Kind



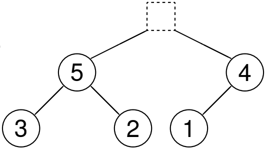
und wiederhole



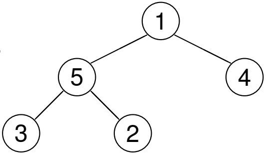
und fertig.

Ein Beispiel

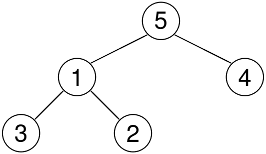
Vorher



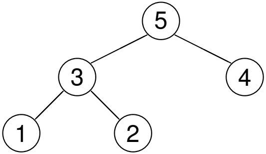
und nachher



Repariere die Heap-Ordnung: Vertausche mit dem **größtem** Kind



und wiederhole



und fertig.

Repariere die Heap-Ordnung nach unten.

Repair_down

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

void heap::repair_down (int wo)

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
```

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
  while (wo <= n/2)
```

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
  while (wo <= n/2)
      {kind = 2 * wo;
```

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
  while (wo <= n/2)
      {kind = 2 * wo;
      if ((kind < n) && (H[kind] < H[kind + 1])) kind ++;
```

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
  while (wo <= n/2)
      {kind = 2 * wo;
      if ((kind < n) && (H[kind] < H[kind + 1])) kind ++;
      if (p >= H[kind]) break;
```

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
  while (wo <= n/2)
      {kind = 2 * wo;
      if ((kind < n) && (H[kind] < H[kind + 1])) kind ++;
      if (p >= H[kind]) break;
      H[wo] = H[kind]; wo = kind; }
```

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
  while (wo <= n/2)
      {kind = 2 * wo;
      if ((kind < n) && (H[kind] < H[kind + 1])) kind ++;
      if (p >= H[kind]) break;
      H[wo] = H[kind]; wo = kind; }
  H[wo] = p; }
```

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
  while (wo <= n/2)
      {kind = 2 * wo;
      if ((kind < n) && (H[kind] < H[kind + 1])) kind ++;
      if (p >= H[kind]) break;
      H[wo] = H[kind]; wo = kind; }
  H[wo] = p; }
```

- Die Priorität *p* wird mit der Priorität des „größten Kinds“ verglichen und möglicherweise vertauscht.

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
  while (wo <= n/2)
      {kind = 2 * wo;
      if ((kind < n) && (H[kind] < H[kind + 1])) kind ++;
      if (p >= H[kind]) break;
      H[wo] = H[kind]; wo = kind; }
  H[wo] = p; }
```

- Die Priorität p wird mit der Priorität des „größten Kinds“ verglichen und möglicherweise vertauscht.
- Die Prozedur endet, wenn wo die richtige Position ist, bzw. wenn wo ein Blatt beschreibt.

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
  while (wo <= n/2)
      {kind = 2 * wo;
      if ((kind < n) && (H[kind] < H[kind + 1])) kind ++;
      if (p >= H[kind]) break;
      H[wo] = H[kind]; wo = kind; }
  H[wo] = p; }
```

- Die Priorität *p* wird mit der Priorität des „größten Kinds“ verglichen und möglicherweise vertauscht.
- Die Prozedur endet, wenn wo die richtige Position ist, bzw. wenn wo ein Blatt beschreibt.
- Wie groß ist der Aufwand?

Die Prozedur Repair_down

Die Klasse heap enthalte die Funktion **repair_down**.

```
void heap::repair_down (int wo)
  {int kind; int p = H[wo];
  while (wo <= n/2)
      {kind = 2 * wo;
      if ((kind < n) && (H[kind] < H[kind + 1])) kind ++;
      if (p >= H[kind]) break;
      H[wo] = H[kind]; wo = kind; }
  H[wo] = p; }
```

- Die Priorität p wird mit der Priorität des „größten Kinds“ verglichen und möglicherweise vertauscht.
- Die Prozedur endet, wenn wo die richtige Position ist, bzw. wenn wo ein Blatt beschreibt.
- Wie groß ist der Aufwand? Höchstens proportional zur Tiefe.

Change_priority und Remove

- **void change_priority** (int *wo*, int *p*):

Change_priority und Remove

- **void change_priority** (int *wo*, int *p*):
    - Wir aktualisieren die Priorität, setzen also H[*wo*] $= p$.

Change_priority und Remove

- **void change_priority** (int *wo*, int *p*):
  - Wir aktualisieren die Priorität, setzen also H[wo] $= p$.
  - Aber wir verletzen damit möglicherweise die Heap-Ordnung!

Change_priority und Remove

- **void change_priority** (int *wo*, int *p*):
  - Wir aktualisieren die Priorität, setzen also H[*wo*] $= p$.
  - Aber wir verletzen damit möglicherweise die Heap-Ordnung!
    - Wenn die Priorität angewachsen ist, dann rufe **repair_**

Change_priority und Remove

- **void change_priority** (int *wo*, int *p*):
  - Wir aktualisieren die Priorität, setzen also H[*wo*] $= p$.
  - Aber wir verletzen damit möglicherweise die Heap-Ordnung!
    - Wenn die Priorität angewachsen ist, dann rufe **repair_up** auf.

Change_priority und Remove

- **void change_priority** (int *wo*, int *p*):
  - Wir aktualisieren die Priorität, setzen also H[*wo*] $= p$.
  - Aber wir verletzen damit möglicherweise die Heap-Ordnung!
    - Wenn die Priorität angewachsen ist, dann rufe **repair_up** auf.
    - Ansonsten hat sich die Priorität verringert und **repair_down** ist aufzurufen.

Change_priority und Remove

- **void change_priority** (int *wo*, int *p*):
  - Wir aktualisieren die Priorität, setzen also H[*wo*] $= p$.
  - Aber wir verletzen damit möglicherweise die Heap-Ordnung!
    - Wenn die Priorität angewachsen ist, dann rufe **repair_up** auf.
    - Ansonsten hat sich die Priorität verringert und **repair_down** ist aufzurufen.
- **void remove**(int *wo*):

Change_priority und Remove

- **void change_priority** (int *wo*, int *p*):
  - Wir aktualisieren die Priorität, setzen also H[wo] $= p$.
  - Aber wir verletzen damit möglicherweise die Heap-Ordnung!
    - Wenn die Priorität angewachsen ist, dann rufe **repair_up** auf.
    - Ansonsten hat sich die Priorität verringert und **repair_down** ist aufzurufen.
- **void remove**(int *wo*):
  - Stelle die Heap-Struktur durch H[wo] $=$ H[n- -]; wieder her

Change_priority und Remove

- **void change_priority** (int *wo*, int *p*):
  - Wir aktualisieren die Priorität, setzen also H[wo] $= p$.
  - Aber wir verletzen damit möglicherweise die Heap-Ordnung!
    - Wenn die Priorität angewachsen ist, dann rufe **repair_up** auf.
    - Ansonsten hat sich die Priorität verringert und **repair_down** ist aufzurufen.
- **void remove**(int *wo*):
  - Stelle die Heap-Struktur durch H[wo] $=$ H[n- -]; wieder her
  - und rufe dann change_priority auf.

Change_priority und Remove

- **void change_priority** (int *wo*, int *p*):
  - Wir aktualisieren die Priorität, setzen also $H[wo] = p$.
  - Aber wir verletzen damit möglicherweise die Heap-Ordnung!
    - ⋆ Wenn die Priorität angewachsen ist, dann rufe **repair_up** auf.
    - ⋆ Ansonsten hat sich die Priorität verringert und **repair_down** ist aufzurufen.
- **void remove**(int *wo*):
  - Stelle die Heap-Struktur durch $H[wo] = H[n\text{- -}]$; wieder her
  - und rufe dann change_priority auf.

Alle vier Operationen

insert, delete_max, change_priority und **remove**

benötigen Zeit höchstens proportional zur Tiefe des Heaps.

Die Tiefe eines Heaps mit n Knoten

Der Binärbaum T besitze Heap-Struktur.

Die Tiefe eines Heaps mit n Knoten

Der Binärbaum T besitze Heap-Struktur.

- Wenn T die Tiefe $t = \mathit{Tiefe}(T)$ besitzt, dann hat T mindestens

$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1}$$

Die Tiefe eines Heaps mit n Knoten

Der Binärbaum T besitze Heap-Struktur.

- Wenn T die Tiefe $t = \textit{Tiefe}(T)$ besitzt, dann hat T mindestens

$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 1$$

Die Tiefe eines Heaps mit n Knoten

Der Binärbaum T besitze Heap-Struktur.

- Wenn T die Tiefe $t = \mathit{Tiefe}(T)$ besitzt, dann hat T mindestens

$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 1 = 2^t$$

Knoten

Die Tiefe eines Heaps mit n Knoten

Der Binärbaum T besitze Heap-Struktur.

- Wenn T die Tiefe $t = Tiefe(T)$ besitzt, dann hat T mindestens

$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 1 = 2^t$$

  Knoten
- aber nicht mehr als

$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1}$$

Die Tiefe eines Heaps mit n Knoten

Der Binärbaum T besitze Heap-Struktur.

- Wenn T die Tiefe $t = \mathit{Tiefe}(T)$ besitzt, dann hat T mindestens
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 1 = 2^t$$
Knoten
- aber nicht mehr als
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 2^t$$

Die Tiefe eines Heaps mit n Knoten

Der Binärbaum T besitze Heap-Struktur.

- Wenn T die Tiefe $t = \mathit{Tiefe}(T)$ besitzt, dann hat T mindestens
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 1 = 2^t$$
Knoten
- aber nicht mehr als
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 2^t = 2^{t+1} - 1$$
Knoten.

Die Tiefe eines Heaps mit n Knoten

Der Binärbaum T besitze Heap-Struktur.

- Wenn T die Tiefe $t = \mathit{Tiefe}(T)$ besitzt, dann hat T mindestens
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 1 = 2^t$$
Knoten
- aber nicht mehr als
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 2^t = 2^{t+1} - 1$$
Knoten.
- Also folgt für die Knotenzahl n,
$$2^{\mathit{Tiefe}(T)} \leq n$$

Die Tiefe eines Heaps mit n Knoten

Der Binärbaum T besitze Heap-Struktur.

- Wenn T die Tiefe $t = \mathit{Tiefe}(T)$ besitzt, dann hat T mindestens
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 1 = 2^t$$
Knoten
- aber nicht mehr als
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 2^t = 2^{t+1} - 1$$
Knoten.
- Also folgt für die Knotenzahl n,
$$2^{\mathit{Tiefe}(T)} \leq n < 2^{\mathit{Tiefe}(T)+1}.$$

Die Tiefe eines Heaps mit n Knoten

Der Binärbaum T besitze Heap-Struktur.

- Wenn T die Tiefe $t = \mathit{Tiefe}(T)$ besitzt, dann hat T mindestens
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 1 = 2^t$$
Knoten
- aber nicht mehr als
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{t-1} + 2^t = 2^{t+1} - 1$$
Knoten.
- Also folgt für die Knotenzahl n,
$$2^{\mathit{Tiefe}(T)} \leq n < 2^{\mathit{Tiefe}(T)+1}.$$

Es ist
$$\mathit{Tiefe}(T) = \lfloor \log_2 n \rfloor$$
und alle vier Operationen werden somit in logarithmischer Zeit unterstützt!

Heapsort

Ein Array $(A[1], \ldots, A[n])$ ist zu sortieren.

Heapsort

Ein Array $(A[1], \ldots, A[n])$ ist zu sortieren.

```
for (i=1; i <= n ; i++)
    insert(A[i]);
// buildheap ist schneller
```

Heapsort

Ein Array $(A[1], \ldots, A[n])$ ist zu sortieren.

```
for (i=1; i <= n ; i++)
    insert(A[i]);
// buildheap ist schneller

int N = n;

for (n=N; n >= 1 ; n- -)
    A[n] = delete_max( );
//Das Array A ist jetzt aufsteigend sortiert.
```

Heapsort

Ein Array $(A[1], \ldots, A[n])$ ist zu sortieren.

```
for (i=1; i <= n ; i++)
    insert(A[i]);
// buildheap ist schneller
int N = n;
for (n=N; n >= 1 ; n- -)
    A[n] = delete_max( );
//Das Array A ist jetzt aufsteigend sortiert.
```

- Zuerst werden n Schlüssel eingefügt und dann wird n Mal das Maximum entfernt.

Heapsort

Ein Array $(A[1], \ldots, A[n])$ ist zu sortieren.

```
for (i=1; i <= n ; i++)
    insert(A[i]);
// buildheap ist schneller
int N = n;
for (n=N; n >= 1 ; n- -)
    A[n] = delete_max( );
//Das Array A ist jetzt aufsteigend sortiert.
```

- Zuerst werden n Schlüssel eingefügt und dann wird n Mal das Maximum entfernt.
- Sowohl die anfängliche Einfügephase wie auch die letztliche Entfernungsphase benötigen Zeit höchstens $O(n \cdot \log_2 n)$.

Heapsort

Ein Array $(A[1], \ldots, A[n])$ ist zu sortieren.

```
for (i=1; i <= n ; i++)
    insert(A[i]);
// buildheap ist schneller

int N = n;

for (n=N; n >= 1 ; n- -)
    A[n] = delete_max( );
//Das Array A ist jetzt aufsteigend sortiert.
```

- Zuerst werden n Schlüssel eingefügt und dann wird n Mal das Maximum entfernt.
- Sowohl die anfängliche Einfügephase wie auch die letztliche Entfernungsphase benötigen Zeit höchstens $O(n \cdot \log_2 n)$.

Heapsort ist eines der schnellsten Sortierverfahren.

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

- Beginne die Reparatur mit den Blättern.

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

- Beginne die Reparatur mit den Blättern. Jedes Blatt ist schon ein Heap und eine Reparatur ist nicht notwendig.

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

- Beginne die Reparatur mit den Blättern. Jedes Blatt ist schon ein Heap und eine Reparatur ist nicht notwendig.
- Wenn t die Tiefe des Heaps ist, dann kümmern wir uns als Nächstes um die Knoten v der Tiefe $t - 1$.

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

- Beginne die Reparatur mit den Blättern. Jedes Blatt ist schon ein Heap und eine Reparatur ist nicht notwendig.
- Wenn t die Tiefe des Heaps ist, dann kümmern wir uns als Nächstes um die Knoten v der Tiefe $t-1$.
  - Sei T_v der Teilbaum mit Wurzel v.

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

- Beginne die Reparatur mit den Blättern. Jedes Blatt ist schon ein Heap und eine Reparatur ist nicht notwendig.
- Wenn t die Tiefe des Heaps ist, dann kümmern wir uns als Nächstes um die Knoten v der Tiefe $t-1$.
  - Sei T_v der Teilbaum mit Wurzel v.
  - T_v ist nur dann kein Heap, wenn die Heap-Ordnung im Knoten v verletzt ist:

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

- Beginne die Reparatur mit den Blättern. Jedes Blatt ist schon ein Heap und eine Reparatur ist nicht notwendig.
- Wenn t die Tiefe des Heaps ist, dann kümmern wir uns als Nächstes um die Knoten v der Tiefe $t-1$.
  - Sei T_v der Teilbaum mit Wurzel v.
  - T_v ist nur dann kein Heap, wenn die Heap-Ordnung im Knoten v verletzt ist: Repariere mit repair_down, gestartet in v.

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

- Beginne die Reparatur mit den Blättern. Jedes Blatt ist schon ein Heap und eine Reparatur ist nicht notwendig.
- Wenn t die Tiefe des Heaps ist, dann kümmern wir uns als Nächstes um die Knoten v der Tiefe $t-1$.
  - Sei T_v der Teilbaum mit Wurzel v.
  - T_v ist nur dann kein Heap, wenn die Heap-Ordnung im Knoten v verletzt ist: Repariere mit repair_down, gestartet in v.
  - Höchstens ein Vertauschungsschritt wird benötigt.

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

- Beginne die Reparatur mit den Blättern. Jedes Blatt ist schon ein Heap und eine Reparatur ist nicht notwendig.
- Wenn t die Tiefe des Heaps ist, dann kümmern wir uns als Nächstes um die Knoten v der Tiefe $t - 1$.
    - Sei T_v der Teilbaum mit Wurzel v.
    - T_v ist nur dann kein Heap, wenn die Heap-Ordnung im Knoten v verletzt ist: Repariere mit repair_down, gestartet in v.
    - Höchstens ein Vertauschungsschritt wird benötigt.
- Wenn v ein Knoten der Tiefe $t - j$ ist, dann muss höchstens die Heap-Ordnung im Knoten v reparariert werden.

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

- Beginne die Reparatur mit den Blättern. Jedes Blatt ist schon ein Heap und eine Reparatur ist nicht notwendig.
- Wenn t die Tiefe des Heaps ist, dann kümmern wir uns als Nächstes um die Knoten v der Tiefe $t-1$.
  - Sei T_v der Teilbaum mit Wurzel v.
  - T_v ist nur dann kein Heap, wenn die Heap-Ordnung im Knoten v verletzt ist: Repariere mit repair_down, gestartet in v.
  - Höchstens ein Vertauschungsschritt wird benötigt.
- Wenn v ein Knoten der Tiefe $t-j$ ist, dann muss höchstens die Heap-Ordnung im Knoten v repparariert werden.
  - Höchstens j Vertauschungsschritte genügen.

Wie kann der Heap schneller geladen werden?

Führe statt vielen kleinen Reparaturen eine große Reparatur durch.

- Beginne die Reparatur mit den Blättern. Jedes Blatt ist schon ein Heap und eine Reparatur ist nicht notwendig.
- Wenn t die Tiefe des Heaps ist, dann kümmern wir uns als Nächstes um die Knoten v der Tiefe $t-1$.
  - Sei T_v der Teilbaum mit Wurzel v.
  - T_v ist nur dann kein Heap, wenn die Heap-Ordnung im Knoten v verletzt ist: Repariere mit repair_down, gestartet in v.
  - Höchstens ein Vertauschungsschritt wird benötigt.
- Wenn v ein Knoten der Tiefe $t-j$ ist, dann muss höchstens die Heap-Ordnung im Knoten v repararient werden.
  - Höchstens j Vertauschungsschritte genügen.

Es gibt nur wenige teure Reparaturschritte!

Analyse

- Es gibt 2^{t-j} Knoten der Tiefe $t - j$ (für $j \geq 1$).

Analyse

- Es gibt 2^{t-j} Knoten der Tiefe $t - j$ (für $j \geq 1$).
- Für jeden dieser Knoten sind höchstens j Vertauschungsschritte durchzuführen

Analyse

- Es gibt 2^{t-j} Knoten der Tiefe $t - j$ (für $j \geq 1$).
- Für jeden dieser Knoten sind höchstens j Vertauschungsschritte durchzuführen und die Ladezeit ist durch $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j}$ beschränkt.

Analyse

- Es gibt 2^{t-j} Knoten der Tiefe $t - j$ (für $j \geq 1$).
- Für jeden dieser Knoten sind höchstens j Vertauschungsschritte durchzuführen und die Ladezeit ist durch $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j}$ beschränkt.
- Behauptung: $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j} = 2^{t+1} - t - 2$.

Analyse

- Es gibt 2^{t-j} Knoten der Tiefe $t - j$ (für $j \geq 1$).
- Für jeden dieser Knoten sind höchstens j Vertauschungsschritte durchzuführen und die Ladezeit ist durch $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j}$ beschränkt.
- Behauptung: $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j} = 2^{t+1} - t - 2$. Wir geben einen induktiven Beweis:

Analyse

- Es gibt 2^{t-j} Knoten der Tiefe $t-j$ (für $j \geq 1$).
- Für jeden dieser Knoten sind höchstens j Vertauschungsschritte durchzuführen und die Ladezeit ist durch $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j}$ beschränkt.
- Behauptung: $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j} = 2^{t+1} - t - 2$. Wir geben einen induktiven Beweis:

$$\sum_{j=1}^{t+1} j \cdot 2^{t+1-j} = 2\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j} + t + 1$$

Analyse

- Es gibt 2^{t-j} Knoten der Tiefe $t-j$ (für $j \geq 1$).
- Für jeden dieser Knoten sind höchstens j Vertauschungsschritte durchzuführen und die Ladezeit ist durch $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j}$ beschränkt.
- Behauptung: $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j} = 2^{t+1} - t - 2$. Wir geben einen induktiven Beweis:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{t+1} j \cdot 2^{t+1-j} &= 2\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j} + t + 1 \\
&= 2 \cdot (2^{t+1} - t - 2) + t + 1
\end{aligned}
$$

Analyse

- Es gibt 2^{t-j} Knoten der Tiefe $t-j$ (für $j \geq 1$).
- Für jeden dieser Knoten sind höchstens j Vertauschungsschritte durchzuführen und die Ladezeit ist durch $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j}$ beschränkt.
- Behauptung: $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j} = 2^{t+1} - t - 2$. Wir geben einen induktiven Beweis:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{t+1} j \cdot 2^{t+1-j} &= 2\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j} + t + 1 \\
&= 2 \cdot (2^{t+1} - t - 2) + t + 1 \\
&= 2^{t+2} - (t+1) - 2.
\end{aligned}
$$

Analyse

- Es gibt 2^{t-j} Knoten der Tiefe $t-j$ (für $j \geq 1$).
- Für jeden dieser Knoten sind höchstens j Vertauschungsschritte durchzuführen und die Ladezeit ist durch $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j}$ beschränkt.
- Behauptung: $\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j} = 2^{t+1} - t - 2$. Wir geben einen induktiven Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{t+1} j \cdot 2^{t+1-j} &= 2\sum_{j=1}^{t} j \cdot 2^{t-j} + t + 1 \\
&= 2 \cdot (2^{t+1} - t - 2) + t + 1 \\
&= 2^{t+2} - (t+1) - 2.
\end{aligned}$$

Der Heap kann in linearer Zeit geladen werden.

Die Klasse heap

```
class heap
{private:
    int *H; // H ist der Heap.
    int n; // n bezeichnet die Größe des Heaps.
    void repair_up (int wo);
    void repair_down (int wo);
public:
    heap (int max) // Konstruktor.
        { H = new int[max]; n = 0; }
    int read (int i) { return H[i]; }
    void insert (int priority);
    int delete_max( );
    void change_priority (int wo, int p);
    void remove(int wo);
    void buildheap();
    void heapsort(); };
```

Prioritätswarteschlangen: Zusammenfassung

(a) Ein Heap mit n Prioritäten unterstützt jede der Operationen

insert, **delete_max**, **change_priority** und **remove**

in Zeit $O(\log_2 n)$.

Prioritätswarteschlangen: Zusammenfassung

(a) Ein Heap mit n Prioritäten unterstützt jede der Operationen

insert, **delete_max**, **change_priority** und **remove**

in Zeit $O(\log_2 n)$.

- Für die Operationen **change_priority** und **remove** muss die Position der zu ändernden Priorität bestimmt werden. (Übungsaufgabe)

Prioritätswarteschlangen: Zusammenfassung

(a) Ein Heap mit n Prioritäten unterstützt jede der Operationen

insert, **delete_max**, **change_priority** und **remove**

in Zeit $O(\log_2 n)$.

- Für die Operationen **change_priority** und **remove** muss die Position der zu ändernden Priorität bestimmt werden. (Übungsaufgabe)

(b) **buildheap** baut einen Heap mit n Prioritäten in Zeit $O(n)$.

Prioritätswarteschlangen: Zusammenfassung

(a) Ein Heap mit n Prioritäten unterstützt jede der Operationen

insert, **delete_max**, **change_priority** und **remove**

in Zeit $O(\log_2 n)$.

- Für die Operationen **change_priority** und **remove** muss die Position der zu ändernden Priorität bestimmt werden. (Übungsaufgabe)

(b) **buildheap** baut einen Heap mit n Prioritäten in Zeit $O(n)$.

(c) **heapsort** sortiert n Zahlen in Zeit $O(n \log_2 n)$.