

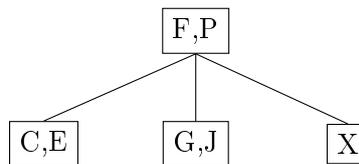
## Übungsblatt 6

Ausgabe: 24.05.2022  
Abgabe: 31.05.2022, 08:00

### Aufgabe 6.1 $(a, b)$ -Bäume

(8 + 8 Punkte)

Gegeben sei der folgende  $(a, b)$ -Baum  $T_{ab}$ :



Fügen Sie für die beiden folgenden Spezifikationen von  $T_{ab}$  jeweils die Schlüssel D, Z, W, V und S ein und entfernen Sie anschließend die Schlüssel P, C und V (jeweils in dieser Reihenfolge).

- $T_{ab}$  ist ein  $(2, 3)$ -Baum.
- $T_{ab}$  ist ein  $(2, 4)$ -Baum.

Geben Sie jeweils die Zwischenschritte in graphischer Darstellung an und beschreiben sie kurz, was - aus welchem Grund - geschieht.

*Hinweis:* Es kann für das Verständnis helfen, die Operationen noch einmal in kleinere Zwischenschritte aufzuspalten. Es genügt jedoch, eine Grafik für den Zustand nach jeder Operation anzugeben.

### Aufgabe 6.2 Hashing-Verfahren

(4 + 4 + 4 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = (5 \cdot x) \bmod 7$  und  $g(x) = 4 - (x \bmod 4)$ . Fügen Sie die Zahlen 73, 85, 48, 66, 45, 39 und 12 in dieser Reihenfolge in eine Hashtabelle der Größe 7 ein. Dabei sollen die Zahlen mit

- Verketteten, d.h.,  $h(x) = f(x)$ ,
- linearem Austesten, d.h.,  $h_i(x) = (f(x) + i) \bmod 7$ ,
- doppeltem Hashing, d.h.,  $h_i(x) = (f(x) + i \cdot g(x)) \bmod 7$ ,

eingefügt werden. Geben Sie jeweils die Belegung der Hashtabelle nach dem Einfügen aller Zahlen an. Trotz des Ansatzes der offenen Adressierung soll die resultierende Hashtabelle stets dieselbe Größe behalten.

### Aufgabe 6.3 Hashing the Universe

(5 Punkte)

Gegeben sei ein Universum  $U$  von Schlüsseln mit  $|U| > k \cdot m$  sowie eine Hashfunktion  $h : U \rightarrow \{0, 1, \dots, m - 1\}$ . Zeigen Sie, dass es mindestens  $k$  Elemente in  $U$  gibt, die unter  $h$  auf denselben Wert abgebildet werden, d.h., es gibt  $A \subseteq U$  mit  $|A| = k$  und  $h(a_1) = h(a_2)$  für alle  $a_1, a_2 \in A$ .

**Aufgabe 6.4** *Hashing mit Auslastungsfaktor*

(7 Punkte)

Gegeben ist eine leere Hashtabelle  $H$  der Größe  $m = 2$  zusammen mit den Hashfunktionen  $h_i(x) = (7 \cdot x + i) \bmod m$  für  $i = 0, \dots, 6$ . Fügen Sie die folgende Sequenz von Schlüsseln in der gegebenen Reihenfolge in die Hashtabelle ein und vergrößern Sie die Hashtabelle, wann immer der Auslastungsfaktor  $\lambda$  wenigstens  $\frac{1}{2}$  erreicht. Stellen Sie die Hashtabelle vor und nach jeder Reorganisation sowie nach der Einfügung aller Schlüssel dar. Wenn Sie die Hashtabelle vergrößern müssen, wählen Sie als neue Größe die kleinste Primzahl, sodass sich die Größe wenigstens verdoppelt. Fügen Sie Schlüssel, die bereits in der Hashtabelle waren, in der Reihenfolge in die größere Tabelle ein, in der sie in der kleineren Tabelle standen (vom kleinen zum großen Index).

70, 18, 44, 65, 72, 11, 26, 57, 35, 14, 90.

*Hinweis:* Für eine bessere Übersicht können Sie leere Indizes der Hashtabelle weglassen.