Algorithmen & Datenstrukturen 1

Sommersemester 2022

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Marco Schmalhofer

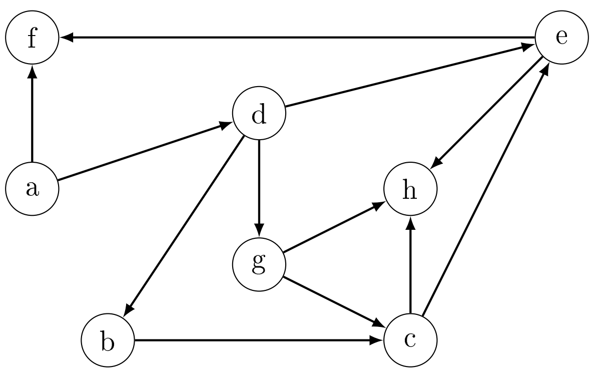
GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 7

Ausgabe: 31.05.2022
Abgabe: 07.06.2022, **08:00**

Aufgabe 7.1 *Graphen* (2 + 3 + 4 + 4 + 5 = 18 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden gerichteten Graphen G:



a) Bestimmen Sie die In- und Out-Grade aller Knoten in G. Eine Begründung ist nicht notwendig.

b) Geben Sie eine topologische Sortierung für G an. Eine Begründung ist nicht notwendig.

c) Stellen Sie den Graphen G als Adjazenzliste dar. Die direkten Nachfolger jedes Knotens v sind dabei in lexikographisch aufsteigender Reihenfolge in die Liste von v einzutragen. Eine Begründung ist nicht notwendig.

d) Stellen Sie den Graphen G als Adjazenzmatrix dar. Nutzen Sie hierfür Zeilen- und Spaltenbezeichnungen in lexikographisch aufsteigender Reihenfolge. Eine Begründung ist nicht notwendig.

e) Betrachten Sie nun einen *beliebigen* gerichteten, azyklischen Graphen G' mit n Knoten (ohne Mehrfachkanten). Bestimmen Sie die maximale Anzahl an Kanten in G' in Abhängigkeit von n. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 7.2 *Adjazenzliste und Adjazenzmatrix* (7 + 7 Punkte)

a) Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist der *Komplementgraph* definiert als $\bar{G} = (V, \bar{E})$, wobei $\bar{E} = \{\{u, v\} \mid u \neq v \text{ und } \{u, v\} \notin E\}$.

   Sei $A[1 \dots n]$ die Adjazenzlistendarstellung eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, ..., n\}$. Geben Sie ein Verfahren mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$ in Pseudocode an, das basierend auf der Eingabe A den Komplementgraphen $\bar{G}$ in Adjazenzlistendarstellung ausgibt.

   Begründen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens und zeigen Sie, dass die Laufzeitschranke eingehalten wird.

b) Sei A die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, ..., n\}$.

   Geben Sie ein Verfahren mit Laufzeit $\mathcal{O}(n)$ in Pseudocode an, mit dem Sie entscheiden können, ob es in G einen Knoten v gibt, sodass $(u, v) \in E$ für alle $u \in V \setminus \{v\}$ und v keine ausgehende Kante hat.

   Begründen Sie die Korrektheit des Verfahrens und zeigen Sie, dass die Laufzeitschranke eingehalten wird.

Aufgabe 7.3 *Universelles Hashing* (4 + 4 Punkte)

Sei $U = \{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$ für eine Primzahl $p > m$.

a) Betrachten Sie die Klasse

$$G = \{g_{a,b} \mid 0 \leq a, b < p, \;\; g_{a,b}(x) = (ax + b) \mod m\}$$

   von Hashfunktionen. Ist G für jede Wahl der Parameter m und p 4-universell? Beweisen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie: Es existiert eine 1-universelle Klasse $H^* \subseteq \big\{h \mid h : U \mapsto \{0, 1, \dots, m - 1\}\big\}$ von Hashfunktionen.