Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Marco Schmalhofer

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

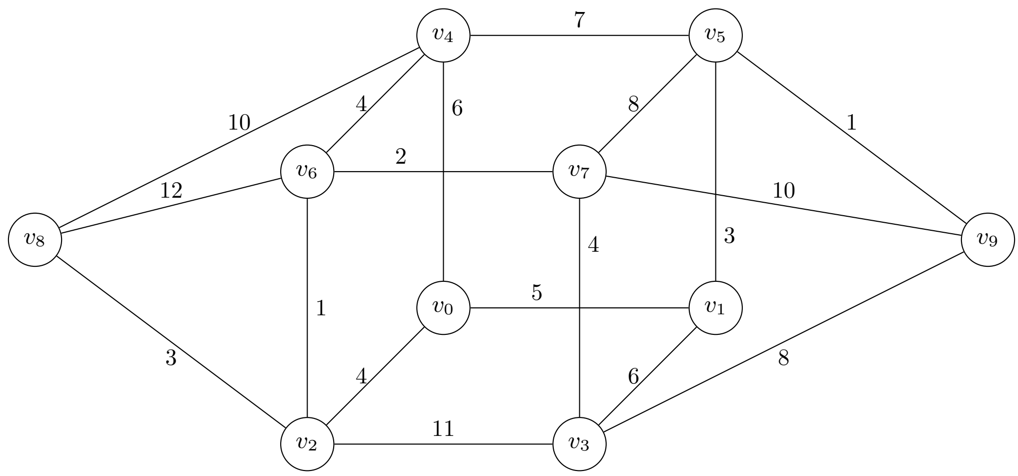
Übungsblatt 9

Ausgabe: 14.06.2022
Abgabe: 21.06.2022, **08:00**

Dies ist das erste für den Veranstaltungsteil **Algo-1b** (3 CP) relevante Übungsblatt. Alle folgenden Blätter werden ebenfalls vollständig für Algo-1b relevant sein. Mit * markierte Aufgaben sind Bonusaufgaben, d.h. sie werden nicht zur Summe der erreichbaren Punkte hinzugezählt.

Aufgabe 9.1 *Dijkstra und DJP* (8 + 8 + 3 + 2 Punkte)

Gegeben sei der folgende Graph:



a) Bestimmen Sie mit Hilfe des DJP-Algorithmus den minimalen Spannbaum des Graphen. Starten Sie mit $S = \{v_0\}$. Notieren Sie dabei in jedem Schritt, welche *kürzesten S-kreuzenden Kanten* zur Auswahl stehen. Falls es mehrere kürzeste S-kreuzende Kanten gibt, soll diejenige gewählt werden, die von einem Knoten in S mit kleinstem Index ausgeht. Gibt es mehrere solcher Kanten, soll diejenige gewählt werden, deren zweiter Endpunkt einen möglichst kleinen Index hat.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Dijkstras Algorithmus die kürzesten Wege von Knoten v_0 zu allen anderen Knoten. Hierbei sind die eingetragenen Kantenlängen für beide Richtungen der Kante gültig. Geben Sie nach Hinzunahme eines Knotens in die Menge S die aktualisierten Distanzwerte aller Knoten aus $V \setminus S$ an. Geben Sie außerdem den resultierenden *Baum kürzester Wege* an. Bei gleicher Distanz sollen die Knoten mit kleinerem Index zuerst bearbeitet werden.

c) Konstruieren Sie einen Graphen mit Kantengewichten $w \in \mathbb{Z}$, so dass der Algorithmus von Dijkstra *nicht* die kürzesten Wege findet. Geben Sie die vom Algorithmus berechneten Distanzwerte sowie die tatsächlich kürzesten Distanzen an.

d) Gibt der DJP-Algorithmus auch stets dann einen minimalen Spannbaum für einen Graphen aus, wenn dieser negative Kantengewichte enthält?

Aufgabe 9.2 *Kantengewichte transformieren* ((2+2+2) + (3+3+4*) Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Jeder Kante $e \in E$ ist ein Gewicht $w(e) > 0$ zugeordnet. Wir transformieren G zu einem neuen Graphen G', der dieselben Knoten und Kanten wie G hat, aber andere Kantengewichte. Das Gewicht $w(e)$ einer Kante $e \in E$ in G ändert sich zum Gewicht $w'(e)$ im Graph G'. Betrachten Sie folgende Abbildungen:

i) $w'(e) := c \cdot w(e)$ mit $c < 0$.

ii) $w'(e) := w(e) - c$ mit $0 < c < \min_{e \in E} w(e)$.

iii) $w'(e) := (w(e))^3$.

Bestimmen Sie für jede der obigen Abbildungen i), ii) und iii), ob ...

a) ... die kürzesten Wege in G im neuen Graphen G' erhalten bleiben.

b) ... die minimalen Spannbäume in G im neuen Graphen G' erhalten bleiben.

Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 9.3 *Kürzeste Wege mit minimaler Kantenzahl* (7 Punkte)

Wir betrachten eine Variante des Problems der Bestimmmung kürzester Wege: Für einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit nicht-negativen Kantengewichten und einen Startknoten $s \in V$ sind wieder kürzeste Wege von s zu allen anderen Knoten zu bestimmen. Jedoch ist in dem Fall, dass es für einen Knoten $v \in V$ mehr als einen kürzesten Weg von s nach v gibt, ein kürzester Weg mit einer kleinsten Anzahl von Kanten zu bestimmen.

Beschreiben Sie eine Modifikation von Dijkstras Algorithmus, die diese Variante des Problems löst. Die worst-case Laufzeit soll durch Ihre Modifikation nicht schlechter werden.

Bei allgemeinen Anmerkungen zu den Übungsaufgaben oder Fragen zum Übungsbetrieb erreichen Sie uns unter der folgenden E-Mail-Adresse: algo122@cs.uni-frankfurt.de.