

# NP-Vollständigkeit

Eine Formel  $\alpha$  in **konjunktiver Normalform** hat die Form

$$\alpha \equiv k_1 \wedge k_2 \wedge \dots \wedge k_r.$$

- Die *Klauseln*  $k_1, \dots, k_r$  sind Disjunktionen von *Literals*, also Disjunktionen von Variablen oder negierten Variablen.
- $\alpha$  heißt *erfüllbar*, wenn es eine Belegung der aussagenlogischen Variablen gibt, die  $\alpha$  wahr macht.

## Ein Beispiel:

$$\alpha \equiv (x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y).$$

$\alpha$  wird durch die Belegung  $x = \text{wahr}$  und  $y = \text{wahr}$  erfüllt. Die Formel

$$\beta \equiv (x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$$

ist hingegen nicht erfüllbar.

KNF-SAT ist die Menge aller erfüllbaren Formeln in konjunktiver Normalform.

KNF-SAT ist  $NP$ -vollständig

KNF-SAT ist NP-vollständig.

- Jetzt treten wir die Lawine los:

Wenn  $L_1 \leq_p L_2$  und wenn  $L_1$  ein NP-hartes Problem ist, dann ist auch  $L_2$  ein NP-hartes Problem.

Zuerst reduzieren wir KNF-SAT auf 3-SAT und CLIQUE.

- Wir zeigen den Satz von Cook und Levin später.

# 3-SAT ist NP-vollständig

- Eine **3-KNF** Formel ist eine Formel in konjunktiver Normalform mit höchstens **drei** Variablen pro Klausel.
- **3-SAT** besteht aus allen **erfüllbaren** aussagenlogischen 3-KNF Formeln.
- **3-SAT** gehört zu  $NP$ : Rate eine Belegung und verifiziere, dass jede Klausel erfüllt ist.

Zeige die Reduktion **KNF-SAT**  $\leq_p$  **3-SAT**.

- Die KNF-Formel

$$w = k_1 \wedge \dots \wedge k_r$$

sei Eingabe für KNF-SAT.

- Wir transformieren jede Klausel  $k_j$  in eine 3-KNF Formel  $k_j^*$ . Die transformierte Eingabe ist dann

$$M(w) \equiv k_1^* \wedge \dots \wedge k_r^*.$$

- Wir zeigen dann, dass
  - ▶  $w$  genau dann erfüllbar ist, wenn  $M(w)$  erfüllbar ist
  - ▶ und, dass  $M(w)$  effizient bestimmt werden kann.



Die Klausel  $k_i \equiv l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee l_4 \vee l_5$  habe die Literale  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 \in \{x_1, \neg x_1, \dots, x_n, \neg x_n\}$ .

- Wir erfinden neue Variablen  $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots$  und setzen

$$k_i^* \equiv (l_1 \vee l_2 \vee x_{i,1}) \wedge (\neg x_{i,1} \vee l_3 \vee x_{i,2}) \wedge (\neg x_{i,2} \vee l_4 \vee l_5).$$

- Behauptung:**

$k_i(x_1, \dots, x_n)$  wahr  $\Leftrightarrow$  es gibt  $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots$ , so dass  $k_i^*(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots; x_1, \dots, x_n)$  wahr ist.

- $w = k_1 \wedge \dots \wedge k_r$  ist genau dann erfüllbar, wenn  $k_1^* \wedge \dots \wedge k_r^*$  erfüllbar ist.
- Die Transformation  $M(w) = k_1^* \wedge \dots \wedge k_r^*$  ist effizient berechenbar.

# 2-SAT ist effizient lösbar

- Wie schwierig ist 2-SAT?
- Sei  $w = k_1 \wedge \dots \wedge k_r$  eine 2-KNF Formel.
  - ▶ Setze  $x_1 = \text{wahr}$ .
  - ▶ Berechne die Konsequenzen:
    - ★ In den Klauseln, in denen  $\neg x_1$  vorkommt, ist der Wahrheitswert der verbleibenden Variable **erzwungen**.
    - ★ Ermittle alle unmittelbaren und mittelbaren Konsequenzen.
  - ▶ Wenn die Nicht-Erfüllbarkeit festgestellt wird, dann setze  $x_1 = \text{falsch}$ , ansonsten fahre mit  $x_2$  fort.
- **2-SAT**  $\in \text{P}$ , aber **3-SAT** ist NP-vollständig.

# CLIQUE ist NP-vollständig

Gegeben sei ein Graph mit maximalem Knotengrad  $d$ . Sei  $k$  die maximale Clique-Größe. Was gilt dann?

- (1)  $k = \Theta(d)$
- (2)  $k = O(d)$
- (3)  $k = \Omega(d)$

Auflösung: (2)  $k = O(d)$

## Satz von Karp

3-SAT  $\leq_p$  CLIQUE und CLIQUE ist NP-vollständig.

- **CLIQUE**  $\in$  NP:
  - ▶ Um  $(G, k) \in$  CLIQUE zu überprüfen, raten wir  $k$  Knoten und
  - ▶ verifizieren, dass je zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind.
- **Die Transformation:**
  - ▶ Die 3-KNF Formel  $w = k_1 \wedge \dots \wedge k_r$  mit den Klauseln  $k_j = l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3}$  sei Eingabe für 3-SAT.
  - ▶ Der ungerichteten Graph  $G_w = (V_w, E_w)$  ist die (transformierte) Eingabe für CLIQUE.
  - ▶ Für jede Klausel  $k_j$  erfinden wir eine Menge  $V_i = \{(i, l_{i,1}), (i, l_{i,2}), (i, l_{i,3})\}$  von drei Knoten mit  $V_w = \bigcup_{i=1}^r V_i$ .
  - ▶ Knoten in  $V_i$  werden **nicht** miteinander verbunden.
  - ▶ Ansonsten verbinden wir Knoten  $(i, l)$  und  $(j, l^*)$  für  $i \neq j$  genau dann, wenn  $l$  und  $l^*$  sich **nicht widersprechen**, d.h. wenn  $l$  und  $l^*$  simultan erfüllt werden können.

- Die maximale Größe einer Clique ist durch  $r$ , die Anzahl der Klauseln, beschränkt. Warum?

Eine Clique besitzt höchstens einen Knoten aus einer Menge  $V_i$ , denn keine zwei Knoten aus  $V_i$  sind durch eine Kante verbunden.

- Wenn  $w \in 3\text{-SAT}$ , dann besitzt  $G_w$  eine Clique der Größe  $r$ . Warum?
  - $w$  besitzt eine erfüllende Belegung  $b$  und  $b$  erfüllt mindestens ein Literal  $l_i$  in der  $i$ ten Klausel.
  - Die Knotenmenge

$$\{(i, l_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$$

ist eine Clique, denn für je zwei Knoten  $(i, l_i)$  und  $(j, l_j)$  werden  $l_i$  und  $l_j$  durch  $b$  erfüllt:  $l_i, l_j$  widersprechen sich nicht und die Knoten sind deshalb durch eine Kante verbunden.

- Wenn  $G_w$  eine Clique  $C$  der Größe  $r$  besitzt, dann ist  $w \in 3\text{-SAT}$ . Warum?
  - ▶ Die Clique  $C$  enthält für jedes  $i$  höchstens einen Knoten aus einer Menge  $V_i$ .
  - ▶ Da  $C$  aber  $r$  Knoten enthält, besitzt  $C$  genau einen Knoten  $(i, l_i)$  in  $V_i$ .
  - ▶ Wenn  $(i, l), (j, l^*)$  in  $C$  liegen, dann widersprechen sich die Literale  $l$  und  $l^*$  nicht.  
Alle Literale, die in  $C$  vorkommen, können simultan erfüllt werden!
  - ▶  $w$  ist erfüllbar, da die Literale von  $C$  simultan erfüllbar sind und da  $C$  ein Literal aus jeder Klausel  $k_i$  besitzt.
- Also gilt insgesamt:

$w \in 3\text{-SAT} \Leftrightarrow G_w$  hat eine Clique der Größe  $r$

und wir definieren die effizient berechenbare Transformation

$$M(w) = (G_w, r).$$



Wir haben mit dem graph-theoretischen Problem CLIQUE über die Aussagenlogik geredet:

Erfüllende Belegungen und Cliques der Größe  $r$  entsprechen sich wechselseitig.

# Independent Set ist $NP$ -vollständig

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge  $I \subseteq V$  heißt **unabhängig**, falls **keine** zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind.

Falls  $G$  der vollständige Graph mit  $n$  Knoten ist, dann gilt:

- (1)  $|I| = \Theta(1)$
- (2)  $|I| = \Theta(\log n)$
- (3)  $|I| = \Theta(\sqrt{n})$
- (4)  $|I| = \Theta(n/\log n)$
- (5)  $|I| = \Theta(n)$

Auflösung: (1)  $|I| = \Theta(1)$

# Independent Set

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

- Eine Teilmenge  $I \subseteq V$  heißt **unabhängig**, falls **keine** zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind.
- Eine Eingabe  $(G, k)$  gehört genau dann zum **Independent Set Problem IS**, wenn  $G$  eine unabhängige Menge der Größe mindestens  $k$  besitzt.

- In **IS** sucht man also große, „kollisionsfreie“ Knotenmengen.
- **IS**  $\in$  NP:
  - ▶ Um  $(G, k) \in$  IS zu überprüfen, raten wir  $k$  Knoten und
  - ▶ verifizieren, dass keine zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind.
- **CLIQUE** und **IS** sind sich sehr ähnlich.
- Zeige

$$\text{CLIQUE} \leq_p \text{IS}.$$

CLIQUE  $\leq_p$  IS und IS ist NP-vollständig.

## Die Transformation:

Für  $G = (V, E)$  sei  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  der Komplementgraph von  $G$ .

- Für die Eingabe  $w = (G, k)$  für CLIQUE definieren wir  $M(w) = (\bar{G}, k)$  als transformierte Eingabe.
- $M(w)$  ist effizient berechenbar.
- Funktioniert die Transformation?

$(G, k) \in \text{CLIQUE}$

- $\Leftrightarrow G$  hat eine Clique  $C$  der Größe mindestens  $k$
- $\Leftrightarrow$  Je zwei Knoten von  $C$  sind durch eine Kante in  $G$  verbunden
- $\Leftrightarrow$  Keine zwei Knoten von  $C$  sind durch eine Kante in  $\bar{G}$  verbunden
- $\Leftrightarrow (\bar{G}, k) \in \text{IS}$ .

# Set Cover ist NP-vollständig

Eine Menge  $U$  von Aufgaben und  $m$  Prozesse sind gegeben.

- Prozess  $i$  kann alle Aufgaben in  $A_i \subseteq U$  erledigen.
- **Das Ziel:** Bestimme eine möglichst kleine Anzahl von Prozessen, die alle Aufgaben erledigen.
- Diese Problemstellung ist äquivalent zum Set Cover Problem SC, wobei

$$\text{SC} = \{(A_1, \dots, A_m; k) \mid \text{es gibt } i_1, \dots, i_k \text{ mit } \bigcup_{j=1}^k A_{i_j} = \bigcup_{j=1}^m A_j\}.$$

- $\text{SC} \in \text{NP}$ : Für Eingabe  $(A_1, \dots, A_m; k)$  rate  $k$  Mengen und verifiziere, dass alle Elemente überdeckt werden.
- Wie schwierig ist SC?

# Vertex Cover ist NP-vollständig



Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge  $\ddot{U} \subseteq V$  heißt eine **Überdeckung**, wenn alle Kanten einen Endpunkt in  $\ddot{U}$  besitzen.

Gilt dann für jeden Graph  $G$  mit  $n$  Knoten, dass es eine Überdeckung  $\ddot{U}$  mit der Größe  $|\ddot{U}| \leq n/2$  gibt?

- (1) Ja
- (2) Nein
- (3) Keine Ahnung

Auflösung: (2) Nein, z.B. vollständiger Graph

- Um die Komplexität von **Set Cover** zu bestimmen, betrachten wir das **Vertex Cover** Problem VC.
- Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge  $\ddot{U} \subseteq V$  heißt eine **Überdeckung**, wenn alle Kanten einen Endpunkt in  $\ddot{U}$  besitzen.

**VC** =  $\{(G, k) \mid G \text{ besitzt eine Menge } \ddot{U} \text{ von } k \text{ Knoten, so dass jede Kante einen Endpunkt in der Menge } \ddot{U} \text{ besitzt.}\}$

VC  $\in$  NP:

- Für Eingabe  $(G, k)$  rate  $k$  Knoten.
- Verifiziere, dass alle Kanten mindestens einen geratenen Knoten als Endpunkt haben.

# SC ist mindestens so schwer wie VC

$VC \leq_p SC$ .

- Für  $G = (\{1, \dots, n\}, E)$  definiere für jeden Knoten  $v \in V$  die Menge

$$A_v = \{e \mid e \text{ hat } v \text{ als Endpunkt}\}.$$

- $(G, k) \in VC$

$\Leftrightarrow G$  hat eine Überdeckung  $\tilde{U}$  der Größe  $k$

$\Leftrightarrow$  Die Mengen  $A_v$  für  $v \in \tilde{U}$  überdecken alle Kanten

$\Leftrightarrow (A_1, \dots, A_n; k) \in SC$

- **Die Transformation:** Für die Eingabe  $w = (G, k)$  von VC definieren wir die transformierte Eingabe  $M(w) = (A_1, \dots, A_n; k)$ .

- ▶  $M(w)$  ist effizient berechenbar.
- ▶  $(G, k) \in VC \Leftrightarrow M(w) \in SC$ .

$IS \leq_p VC$ .

$(G, k)$  sei die Eingabe für das Independent Set Problem. Dann gilt

- $(G, k) \in IS \Leftrightarrow G$  hat eine unabhängige Menge  $I$  der Größe  $k$
- $\Leftrightarrow$  jede Kante hat mindestens einen Endpunkt in  $V \setminus I$
- $\Leftrightarrow (G, |V| - k) \in VC$ .

**Die Transformation:** Für Eingabe  $w = (G, k)$  definieren wir die transformierte Eingabe  $M(w) = (G, |V| - k)$ .

- $M(w)$  ist effizient berechenbar.
- $(G, k) \in IS \Leftrightarrow M(w) \in VC$ .

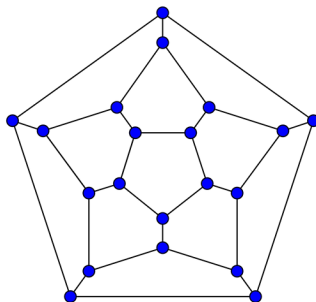
- Wir wissen, dass alle bisher betrachteten Probleme, also **KNF-SAT, 3-SAT, CLIQUE, IS, VC, SC** in  $NP$  liegen.
- Bisher haben wir die folgenden Reduktionen hergeleitet:  
 $KNF-SAT \leq_p 3-SAT$ ,  $3-SAT \leq_p CLIQUE$ ,  $CLIQUE \leq_p IS$ ,  $IS \leq_p VC$ ,  
 $VC \leq_p SC$ .

## Die Lawine gewinnt an Fahrt

Die Probleme **KNF-SAT, 3-SAT, CLIQUE, IS, VC, SC** sind alle  $NP$ -vollständig, **wenn KNF-SAT  $NP$ -vollständig ist.**

# Schwierige Wegeprobleme in Graphen

Im **Hamiltonschen Kreis-Problem HC** ist für einen ungerichteten Graphen  $G$  zu entscheiden, ob  $G$  einen **Hamiltonschen Kreis** besitzt, also einen Kreis, der jeden Knoten genau einmal durchläuft.



Quelle: Wikimedia, Fullerene Graphs

Hat dieser Graph einen Hamiltonschen Kreis?

Hat der  $n$ -dimensionale Würfel einen Hamiltonschen Kreis?

- **DHC** ist das Hamiltonsche Kreis-Problem für gerichtete Graphen.
- Wir erinnern an das **Traveling Salesman Problem TSP**:
  - ▶ für den vollständigen Graphen  $V_n = (\{1, \dots, n\}, \{ \{i, j\} \mid i \neq j \})$ ,
  - ▶ die Kantenlängenlänge:  $\{ \{i, j\} \mid i \neq j \} \rightarrow \mathbb{R}$
  - ▶ sowie den Schwellenwert  $T$  zu entscheiden ist, ob es eine Rundreise der Länge höchstens  $T$  gibt.
- Im Problem **LW** des längsten Weges ist ein ungerichteter Graph  $G$  und ein Schwellenwert  $T$  gegeben.
  - ▶ Es ist zu entscheiden, ob  $G$  einen Weg der Länge mindestens  $T$  besitzt.



$DHC \leq_p HC.$

- Der gerichtete Graph  $G = (V, E)$  sei Eingabe für DHC.
- **Die Transformation:**
  - ▶ In ungerichteten Graphen gibt es „mehr“ Wege, da wir jetzt Kanten in beiden Richtungen durchlaufen können.
  - ▶ Deshalb erfinden wir für jeden Knoten  $v \in V$  drei Knoten  $(v, 0), (v, 1), (v, 2)$  und definieren  $V' = V \times \{0, 1, 2\}$  als die Knotenmenge des transformierten Graphen  $G'$ .
    - ★ Für jede gerichtete Kante  $u \rightarrow v \in E$  setzen wir die ungerichtete Kante  $(u, 2) - (v, 0)$  ein und versuchen so Kantenrichtung nachzuahmen.
    - ★ Schließlich setzen wir die Kanten  $(u, 0) - (u, 1)$  und  $(u, 1) - (u, 2)$  ein.

# Der ungerichtete Graph

- Wie übersetzen sich Wege im gerichteten Graphen in Wege für den ungerichteten Graphen?
  - ▶ Der gerichtete Weg  $u \rightarrow v \rightarrow w$  entspricht
  - ▶ dem ungerichteten Weg  $(u, 2) - (v, 0) - (v, 1) - (v, 2) - (w, 0)$ .
- Nach diesem „Strickmuster“ entspricht jedem Hamiltonschen Kreis im gerichteten Graphen  $G$  ein Hamiltonscher Kreis im ungerichteten Graphen  $G'$ . Also gilt

$$G \in \text{DHC} \Rightarrow G' \in \text{HC}.$$

- Aber hat  $G'$  Hamiltonsche Kreise, obwohl  $G$  keinen Hamiltonschen Kreis besitzt?

# Hamiltonsche Kreise im ungerichteten Graphen

- Wie sehen Hamiltonsche Kreise in  $G'$  aus?
  - ▶ Wenn die Knotengruppe von  $v$  zum ersten Mal im Knoten  $(v, 0)$ , bzw. im Knoten  $(v, 2)$  betreten wird, muss Knoten  $(v, 1)$  durchlaufen werden.

Ansonsten kann der Kreis den „mittleren“ Knoten  $(v, 1)$  nicht mehr durchlaufen, also nicht mehr betreten **und** verlassen!
  - ▶ Ein Hamiltonscher Kreis in  $G'$  durchläuft jede Knotengruppe  $\{(u, 0), (u, 1), (u, 2)\}$  also entweder **stets** in der Vorwärtsrichtung  $(u, 0) - (u, 1) - (u, 2)$  oder **stets** in der Rückwärtsrichtung  $(u, 2) - (u, 1) - (u, 0)$ .
- Hamiltonsche Kreise für  $G'$  übersetzen sich sofort in Hamiltonsche Kreise für  $G$ . Also gilt

$$G' \in \text{HC} \rightarrow G \in \text{DHC}.$$

HC  $\leq_p$  TSP.

# Das Traveling Salesman Problem

- **Die Transformation:** Für die Eingabe  $G = (\{1, \dots, n\}, E)$  von HC wählen wir den vollständigen Graphen  $V_n$ , definieren die Längenfunktion

$$\text{länge}(\{i, j\}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \{i, j\} \in E, \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

und wählen den Schwellenwert  $T = n$ .

- Dann gilt

$$\begin{aligned} G \in HC &\Leftrightarrow G \text{ hat einen Hamiltonschen Kreis} \\ &\Leftrightarrow G \text{ hat eine Rundreise der Länge } n \\ &\Leftrightarrow (V_n, \text{länge}, n) \in \text{TSP}. \end{aligned}$$

# Das metrische Traveling Salesman Problem

- Wird TSP einfacher, wenn wir fordern, dass die Kantenlängen eine Metrik definieren?
- Nein, denn unsere Längenfunktion definiert bereits eine Metrik:  
Die Dreiecksungleichung

$$\text{länge}(\{i, k\}) \leq \text{länge}(\{i, j\}) + \text{länge}(\{j, k\})$$

gilt, da nur die Kantenlängen 1 oder 2 auftreten.

- Also haben wir sogar gezeigt, dass **M-TSP**, das metrische Traveling Salesman Problem  $\text{NP}$ -vollständig ist.

$HC \leq_p LW.$



**Die Transformation:** Für die Eingabe  $G$  von HC müssen wir eine Eingabe für LW basteln.

- **Die wichtige Beobachtung:**  $G$  hat genau dann einen Hamiltonschen Kreis, wenn  $G$  einen Weg hat, der
  - ▶ in 1 beginnt und
  - ▶ in einem Nachbarn von 1 endet.
- Also modifizieren wir den Graphen  $G$ :
  - ▶ Wir fügen einen neuen Knoten  $1'$  hinzu und
  - ▶ verbinden  $1'$  mit allen Nachbarn von 1.
- Jetzt gilt offensichtlich für den neuen Graph  $G'$   
$$G \in HC \Rightarrow G' \text{ hat einen Weg der Länge } n.$$
- Und wenn der Weg der Länge  $n$  **nicht** in 1 beginnt und in  $1'$  endet?

# Und noch eine kleine Modifikation

Wie bringen wir Wege dazu,  
wie gewünscht zu beginnen und zu enden?

- Wir erfinden zwei weitere Knoten  $0$  und  $0'$  und fügen die Kanten  $0 - 1$  sowie  $1' - 0'$  hinzu.
- Der neue Graph sei  $G''$ .
  - ▶ Wenn  $G$  einen Hamiltonschen Kreis hat, dann hat  $G''$  einen Weg  $0 - 1 - \dots - 1' - 0'$  der Länge  $n + 2$ .
  - ▶ Wenn aber  $G''$  einen Weg der Länge  $n + 2$  hat, dann muss dieser Weg in  $0$  oder  $0'$  beginnen und in  $0'$  oder  $0$  enden.
  - ▶ Zwangsläufig ist dann aber  $1$  oder  $1'$  der zweite Knoten und  $1'$  oder  $1$  der vorletzte Knoten.
  - ▶ **Die Konsequenz:**  $G \in HC \Leftrightarrow G''$  hat einen Weg der Länge  $n + 2$ .
- Definiere die Transformation  $M(G) = (G'', n + 2)$ .

# Was haben wir erreicht?

Wir haben die folgenden Reduktionen nachgewiesen:

- $DHC \leq_p HC$ ,
- $HC \leq_p TSP$  und
- $HC \leq_p LW$ .
- Die  $NP$ -Vollständigkeit von  $HC$ ,  $DHC$ ,  $TSP$  und  $LW$  folgt, wenn wir gezeigt haben, dass  $DHC$   $NP$ -vollständig ist. (Siehe Skript.)

# Der Satz von Cook und Levin: KNF-SAT ist $NP$ -vollständig

- Wir zeigen den Satz von Cook und Levin:

KNF-SAT ist NP-vollständig.

- Dann treten wir die Lawine los:

Wenn  $L_1 \leq_p L_2$  und wenn  $L_1$  ein NP-hartes Problem ist, dann ist auch  $L_2$  ein NP-hartes Problem.

KNF-SAT ist NP-vollständig. (Web)

- Für ein beliebiges Problem  $L \in \text{NP}$  müssen wir die Reduktion  $L \leq_p \text{KNF-SAT}$  nachweisen.
- Was wissen wir über  $L$ ?
  - ▶  $L = L(M)$  gilt für eine nichtdeterministische Turingmaschine  $M$ , die in polynomieller Zeit  $T(n)$  arbeitet.
  - ▶ Nach einer entsprechenden Schönheitsoperation:  $M$  hat das Bandalphabet  $\Gamma = \{0, 1, \text{B}\}$ , die Zustandsmenge  $\{0, \dots, q\}$ , mit Anfangszustand  $0$  und  $1$  als einzigem akzeptierenden Zustand.
  - ▶ Wir können annehmen, dass **alle** Berechnungen auf einer Eingabe  $w$  **dieselbe** Zeit  $T = T(|w|)$  in Anspruch nehmen: Lasse  $M$ , wenn nötig „auf der Stelle treten“.
  - ▶ Beachte, der Kopf kann in Zeit  $T$  nur Zellen mit den Adressen  $-T, \dots, T$  erreichen.

# Unsere Aufgabe

Konstruiere in polynomieller Zeit eine Formel  $\alpha_w$  für Eingabe  $w$  mit

$w \in L \Leftrightarrow$  Es gibt eine Berechnung von  $M$ , die  $w$  akzeptiert

$\Leftrightarrow \alpha_w \in \text{KNF-SAT}$ .

Wir müssen mit Hilfe **erfüllender Belegungen** für  $\alpha_w$  über **akzeptierende Berechnung** für die Eingabe  $w$  „reden“ können.

- ▶ Können wir mit Hilfe der Aussagenlogik programmieren?
- ▶ Was ist durch eine Konjunktion von Klauseln ausdrückbar?
  - ★ Die Implikation „ $a \rightarrow b$ “ entspricht der Klausel  $b \vee \neg a$ .
  - ★ Die konjunktive Normalform erlaubt die Forderung, dass alle Klauseln gleichzeitig erfüllt werden müssen.

Wir benutzen aussagenlogische Variablen, um über Zustände, Bandinhalte und Kopfpositionen reden zu können.

- Die Variablen

$$\text{Zustand}_t(i), 0 \leq t \leq T, i \in \{0, \dots, q\}$$

*sollen* auszudrücken, dass  $M$  zum Zeitpunkt  $t$  im Zustand  $i$  ist.

- Die Variablen

$$\text{Kopf}_t(w_0), 0 \leq t \leq T, -T \leq w_0 \leq T$$

*soll* genau dann wahr sein, wenn sich der Kopf von  $M$  zum Zeitpunkt  $t$  auf der Zelle mit Adresse  $w_0$  befindet.

- Die Variablen

$$\text{Zelle}_t(w_0, w_{as}), 0 \leq t \leq T, -T \leq w_0 \leq T, w_{as} \in \Gamma$$

*sollen* auszudrücken, dass die Zelle mit Adresse  $w_0$  zum Zeitpunkt  $t$  das Symbol  $w_{as}$  speichert.



# Wie programmieren wir mit der Aussagenlogik?

**Das Ziel:** Erfüllende Belegungen von  $\alpha_w$  entsprechen akzeptierenden Berechnungen.

- $\alpha_w$  wird die triviale Klausel  $\text{Zustand}_T(1)$  besitzen:
  - ▶  $\alpha_w$  ist nur dann wahr, wenn  $\text{Zustand}_T(1)$  wahr ist.
  - ▶ Die modellierte Berechnung endet in dem einzigen akzeptierenden Zustand!
- **Kodierung der Startkonfiguration:** Drücke aus, dass sich  $M$  im Zustand 0 befindet, ihr Kopf die Zelle 1 liest, die Zellen  $1, \dots, |w|$  die Eingabe  $w$  speichern und die restlichen Zellen das Blanksymbol speichern.

$$\alpha_0 \equiv \text{Zustand}_0(0) \wedge \text{Kopf}_0(1) \wedge \bigwedge_{w_0=1}^{|w|} \text{Zelle}_0(w_0, w_{w_0}) \wedge \bigwedge_{w_0 \in \{-T, \dots, T\} \setminus \{1, \dots, |w|\}} \text{Zelle}_0(w_0, B).$$

Wir müssen aber noch ausdrücken, dass  $M$

- sich in genau einem Zustand befindet,
- ihr Kopf genau eine Zelle liest und
- jede Zelle genau ein Symbol speichert.

Allgemein müssen wir ausdrücken, dass genau eine der Variablen  $y_1, \dots, y_s$  wahr ist: Wir benutzen die **Exklusivitätsformel**

$$\gamma_s(y_1, \dots, y_s) \equiv (y_1 \vee \dots \vee y_s) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq s} (\neg y_i \vee \neg y_j)$$

$\gamma_s$  ist eine KNF-Formel.

# Eindeutigkeit von Zuständen, Kopfpositionen und Zellinhalten

Eindeutigkeit für alle  $T$  Schritte erreichen wir durch:

$$\begin{aligned} \gamma \equiv & \bigwedge_{t=0}^T \gamma_{q+1}(\text{Zustand}_t(0), \dots, \text{Zustand}_t(q)) \\ & \wedge \bigwedge_{t=0}^T \gamma_{2T+1}(\text{Kopf}_t(-T), \dots, \text{Kopf}_t(T)) \\ & \wedge \bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{w_0=-T}^T \gamma_3(\text{Zelle}_t(w_0, 0), \text{Zelle}_t(w_0, 1), \text{Zelle}_t(w_0, B)). \end{aligned}$$



# Beschreibung eines einzigen Schritts von $M$

- Angenommen, wir haben erreicht, dass eine erfüllende Belegung von

$$\gamma \wedge \alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_t$$

einer Berechnung von  $M$  **der Länge  $t$**  entspricht.

- Wie muß  $\alpha_{t+1}$  konstruiert werden, damit eine erfüllende Belegung von

$$\gamma \wedge \alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_t \wedge \alpha_{t+1}$$

einer Berechnungen von  $M$  **der Länge  $t + 1$**  entspricht?

$\alpha_{t+1}$  muß ausdrücken, dass sich Zustand, Kopfposition und Zelleninhalt gemäß dem Programm  $\delta$  und der Konfiguration zum Zeitpunkt  $t$  ändern.

# Änderung der Zellinhalte

- Eine vom Kopf **nicht** besuchte Zelle bleibt unverändert:

Für jede Position  $w_0 \in \{-T, \dots, T\}$  und jedes Symbol  $was \in \{0, 1, B\}$  nehmen wir deshalb die Klausel

$$\text{Zelle}_t(w_0, was) \wedge \neg \text{Kopf}_t(w_0) \rightarrow \text{Zelle}_{t+1}(w_0, was) \quad \leftarrow$$

in die zu konstruierende Formel  $\alpha_{t+1}$  auf.

- Wenn eine Zelle vom Kopf besucht wird, dann konsultiere das Programm  $\delta$ .
  - ▶ Wenn es  $B$  Befehle in  $\delta$  gibt, dann führe die  $B$  Befehlsvariablen

$$\text{Befehl}_t(i) \text{ für } i = 1, \dots, B$$

ein, und fordere, dass zu jedem Zeitpunkt  $t$  genau ein Befehl  $i$  ausgeführt werden darf.


- ▶ Verändere den Zellinhalt, den neuen Zustand und die Kopfposition entsprechend dem auszuführenden Befehl.

# Wenn die Zelle vom Kopf besucht wird, ...

Der  $i$ te Befehl habe die Form

$$(q, \text{was}) \rightarrow (q', \text{was}', \text{Richtung}).$$

Es sei zum Beispiel  $\text{Richtung} = \text{links}$ . Dann erscheinen die folgenden Klauseln in  $\alpha_{t+1}$

- $\text{Zelle}_t(\text{wo}, \text{was}) \wedge \text{Kopf}_t(\text{wo}) \wedge \text{Zustand}_t(q) \wedge \text{Befehl}_{t+1}(i)$
- $\text{Zustand}_{t+1}(q')$
- $\text{Zelle}_t(\text{wo}, \text{was}) \wedge \text{Kopf}_t(\text{wo}) \wedge \text{Zustand}_t(q) \wedge \text{Befehl}_{t+1}(i)$
- $\text{Zelle}_{t+1}(\text{wo}, \text{was}')$
- $\text{Zelle}_t(\text{wo}, \text{was}) \wedge \text{Kopf}_t(\text{wo}) \wedge \text{Zustand}_t(q) \wedge \text{Befehl}_{t+1}(i)$
- $\text{Kopf}_{t+1}(\text{wo} - 1)$ . 

# Auswahl des Befehls

- Für jedes Paar  $(q, a)$  von Zustand  $q$  und Bandsymbol  $a$  sei

$$B(q, a) = \{i \mid \text{Befehl } i \text{ ist im Zustand } q \text{ ausführbar, wenn Buchstabe } a \text{ gelesen wird}\}.$$




- $M$  wählt einen ausführbaren Befehl nichtdeterministisch:



$$\text{Zelle}_t(\text{wo, was}) \wedge \text{Kopf}_t(\text{wo}) \wedge \text{Zustand}_t(q) \rightarrow \bigvee_{i \in B(q, \text{was})} \text{Befehl}_{t+1}(i).$$

- Es ist genau ein Befehl auszuführen und wir erreichen dies durch

$$\gamma_B(\text{Befehl}_{t+1}(0), \text{Befehl}_{t+1}(1), \dots, \text{Befehl}_{t+1}(B)).$$

# Definition von $\alpha_w$

- Zuerst zur Definition von  $\alpha_{t+1}$ :  
Wir nehmen alle Klauseln auf,
  - ▶ die Zellinhalte nicht besuchter Zellen beschreiben  sowie
  - ▶ die Klauseln, die den neuen Zustand, die neue Kopfposition und den neuen Zellinhalt der besuchten Zelle beschreiben .
  - ▶ Gleiches gilt für die Klauseln, die den neuen Befehl auswählen. .
- Die Definition von  $\alpha_w$  ist jetzt abgeschlossen:

$$\alpha_w = \gamma \text{  } \wedge \alpha_0 \text{  } \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_T \wedge \text{Zustand}_T(1).$$

- Die wesentlichen Eigenschaften von  $\alpha_w$ :
  - ▶ Eine erfüllende Belegung entspricht einer akzeptierenden Berechnung und umgekehrt.
  - ▶ Für die Konstruktion von  $\alpha_w$  müssen wir nur die Eingabe  $w$  und das Programm der Turingmaschine kennen. Die Konstruktionsvorschrift ist einfach.
  - ▶  $\alpha_w$  kann in polynomieller Zeit (in  $|w|$ ) berechnet werden!



- Die Aussagenlogik kann über nichtdeterministische Berechnungen reden.
- Warum ist KNF-SAT schwierig?
  - ▶ Gerade weil wir Aussagen über nichtdeterministische Berechnungen machen können.
- Warum haben wir mit Turingmaschinen gearbeitet?
  - ▶ Um den Satz von Cook-Levin mit einem nicht zu komplizierten Argument führen zu können.
  - ▶ Aber wir wissen, dass die Aussagenlogik ebenfalls Aussagen über nichtdeterministische Berechnungen von Supercomputern treffen kann.