# Algorithmen & Datenstrukturen 2

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Marco Schmalhofer

Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

# Übungsblatt 4

Ausgabe: 22.11.2022
Abgabe: 29.11.2022, **08:00**

Die Aufgaben 4.1 und 4.2 setzen die Kenntnis elementarer Notationen zum Thema Alphabete, Worte und Sprachen aus der Veranstaltung Diskrete Modellierung voraus. Diese können bei Bedarf beispielsweise mittels des Skripts (Kapitel 7.1) von Prof. Dr. Schnitger wiederholt werden.

## Aufgabe 4.1 *Turingmaschinen I* (10 Punkte)

Betrachten Sie eine Turingmaschine mit Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{1\}$, Startzustand $q_0$, Arbeitsalphabet $\Gamma = \{1, B\}$ und Menge $F = \{q_2\}$ aller akzeptierenden Zustände. Die Zustandsüberführungsfunktion $\delta$ sei gegeben durch

$$\begin{array}{rl} \delta(q_0, B) = (q_1, B, \texttt{bleib}) & \delta(q_0, 1) = (q_1, 1, \texttt{rechts}) \\ \delta(q_1, B) = \perp & \delta(q_1, 1) = (q_2, 1, \texttt{rechts}) \\ \delta(q_2, B) = \perp & \delta(q_2, 1) = (q_1, 1, \texttt{rechts}) \end{array}$$

Geben Sie an, welche Sprache die Turingmaschine akzeptiert. Begründen Sie außerdem, ob die Turingmaschine für jede Eingabe hält oder nicht.

## Aufgabe 4.2 *Turingmaschinen II* (5 + 5 Punkte)

Entwerfen Sie jeweils eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \Gamma, F)$ mit $\Gamma = \{0, 1, B\}$, welche die genannten Anforderungen erfüllt.

a) $M$ akzeptiert die Sprache $L = \{0, 1\}^+$ und der Lesekopf befindet sich am Ende der Berechnung über dem letzten Eingabesymbol.

b) $M$ akzeptiert die Sprache $L = \{w \in \{0, 1\}^+ \mid w \text{ ist die Binärdarstellung einer geraden Zahl}\}$.

**Aufgabe 4.3** *Etwas mehr als polynomiell* (5 + 4 Punkte)

Analog zu den Klassen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$ definieren wir die Klassen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{NQ}$, welche „etwas mehr“ als polynomielle Laufzeit erlauben.

Die *Klasse* $\mathcal{Q}$ (bzw. $\mathcal{NQ}$) besteht aus allen *Entscheidungsproblemen* $L$, für die es eine deterministische (bzw. nichtdeterministische) Turingmaschine $M$ mit $L(M) = L$ und

$$\texttt{Zeit}_M(n) \leq n^{p(\log_2 n)} \text{ für ein Polynom } p(x) \tag{1}$$

gibt. Falls $p(x) = c$ für eine Konstante $c > 0$, ist die Laufzeitschranke (1) beispielsweise polynomiell.

Auch hier definieren wir eine *Reduktion*. Wir schreiben $L_1 \leq_q L_2$, wenn es eine deterministische Turingmaschine $M$ gibt, so dass für alle $w$

$$w \in L_1 \;\Leftrightarrow\; M(w) \in L_2$$

gilt und die Laufzeit von $M$ durch (1) beschränkt ist. $M$ heißt auch hier *transformierende Turingmaschine*.

Wir nennen $L$ *$\mathcal{NQ}$-hart*, wenn $K \leq_q L$ für alle Probleme $K \in \mathcal{NQ}$. Ist zusätzlich $L \in \mathcal{NQ}$, dann nennen wir $L$ *$\mathcal{NQ}$-vollständig*.

a) Seien $L_1$ und $L_2$ Entscheidungsprobleme.
   Zeigen Sie: Wenn $L_1 \leq_q L_2$ und $L_2 \in \mathcal{Q}$, dann auch $L_1 \in \mathcal{Q}$.

b) Sei $L$ ein $\mathcal{NQ}$-hartes Entscheidungsproblem.
   Zeigen Sie: Wenn $L \in \mathcal{Q}$, dann ist $\mathcal{NQ} \subseteq \mathcal{Q}$.

**Aufgabe 4.4** *Glückliche Fußballfans* (3 + 8 Punkte)

Ein großes Fußballteam besteht aus der Menge $\{1, \ldots, k\}$ von *Spielern*. Die $k$ Spieler sollen jeweils eine Nummer bekommen, wobei keine Nummer mehrfach vorkommen darf, die Nummerierung aber nicht zusammenhängend sein muss.

Das Team hat $\ell$ *Fans*. Jeder Fan $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ hat eine Menge $F_i$ von *Wünschen* für Spielernummern. $F_i$ besteht aus Paaren $(j, b) \in \{1, \ldots, k\} \times \{\text{gerade}, \text{ungerade}\}$. Ein Fan kann also eine Auswahl von Spielern treffen, und für jeden dieser Spieler separat angeben, ob er eine gerade oder ungerade Nummer haben soll.

Ein Fan ist *glücklich* mit einer Nummerierung, wenn mindestens einer seiner Wünsche erfüllt ist.

a) Betrachten Sie folgende Instanz des Problems: Es gibt $k = 3$ Spieler und $\ell = 4$ Fans. Die Wünsche der Fans sind wie folgt:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{(1, \text{gerade}), (2, \text{ungerade})\}\\
F_2 &= \{(1, \text{ungerade}), (2, \text{gerade}), (3, \text{gerade})\}\\
F_3 &= \{(2, \text{ungerade}), (3, \text{ungerade})\}\\
F_4 &= \{(1, \text{gerade}), (3, \text{ungerade})\}
\end{aligned}$$

   Gibt es eine gültige Nummerierung der Spieler, so dass jeder Fan glücklich ist? Falls ja, geben Sie eine solche an. Falls nein, begründen Sie warum es keine gibt.

b) Das Entscheidungsproblems Glückliche-Fans besteht aus allen Instanzen, für die es eine Nummerierung der Spieler gibt, die alle Fans glücklich macht.
   Zeigen Sie die Reduktion Knf-Sat $\leq_p$ Glückliche-Fans.

---

Bei allgemeinen Anmerkungen zu den Übungsaufgaben oder Fragen zum Übungsbetrieb erreichen Sie uns unter der folgenden E-Mail-Adresse: algo222@cs.uni-frankfurt.de.