Algorithmen & Datenstrukturen 2

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Marco Schmalhofer

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 5

Ausgabe: 29.11.2022
Abgabe: 06.12.2022, **08:00**

Aufgabe 5.1 *$\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$* ((2+2+2) + 4 Punkte)

a) Geben Sie für die folgenden Aussagen an, ob diese wahr, falsch oder ungeklärt sind. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

   i) HC $\in \mathcal{P}$.

   ii) Wenn Clique in exponentieller Zeit auf das Zusammenhangsproblem reduziert werden kann, dann ist $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{P}$ bewiesen.

   iii) Sei $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$. Eine erfüllende Belegung der Formel α_w im Satz von Cook-Levin entspricht einer akzeptierenden Berechnung einer deterministischen Turingmaschine.

b) Seien L_1, L_2 sowie L_3 nicht-leere Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Es gelte $L_2 \in \mathcal{NP}$, $L_3 \in \mathcal{P}$ und $L_1 \leq_p L_2 \cap L_3$.

   Zeigen Sie, dass $L_1 \in \mathcal{NP}$.

   Hinweis: Begründen Sie zunächst, warum für Sprachen $L', L'' \in \mathcal{NP}$ der Schnitt $L' \cap L''$ in $\mathcal{NP}$ liegt.

Aufgabe 5.2 *Survival-Trip* (6 Punkte)

Theo hat bei einer Verlosung eine Abenteuerreise gewonnen. Da er keine Ahnung hat, was ihn vor Ort erwarten wird, hat er eine Liste mit Eventualitäten erstellt, auf die er vorbereitet sein möchte. Theo hat nun verschiedene Gegenstände zur Wahl, die er in seinem Reisegepäck verstauen kann. Jeder Gegenstand bereitet ihn auf bestimmte Eventualitäten vor. Er möchte mit möglichst wenig Gegenständen auf alle Eventualitäten vorbereitet sein.

Für eine Menge E an Eventualitäten, Gegenstände $G_1, ..., G_m$, wobei Gegenstand G_i ihn auf die Eventualitäten $E_i \subseteq E$ vorbereitet, sowie eine Schranke $k \in \mathbb{N}$ fragt das Problem Survival-Trip danach, ob es eine Auswahl von k Gegenständen gibt, so dass Theo auf jede Eventualität in E durch mindestens einen Gegenstand vorbereitet ist.

Zeigen Sie, dass Survival-Trip $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Aufgabe 5.3 *Spannbaumgrad* (4 + 5 + 5 Punkte)

Im Entscheidungsproblem SPANNBAUMGRAD sind ein ungerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \geq 2$ gegeben. Ein k-*Spannbaum* $T = (V_T, E_T)$ von G ist ein zusammenhängender, azyklischer Teilgraph von G mit $V_T = V$ und $E_T \subseteq E$, so dass jeder Knoten in T höchstens Grad k hat.

Die formale Sprache SPANNBAUMGRAD sei definiert durch

$$\textsc{Spannbaumgrad} = \{(G, k) \mid \text{ Graph } G \text{ hat einen } k\text{-Spannbaum}\}.$$

a) Geben Sie einen Graphen G mit $|V| = 5$ an, so dass G für alle $k \leq 3$ *keinen* k-Spannbaum hat.

b) Zeigen Sie, dass SPANNBAUMGRAD $\in \mathcal{NP}$.

c) Zeigen Sie, dass SPANNBAUMGRAD $\mathcal{NP}$-hart ist.

   Hinweis: Betrachten Sie den Fall $k = 2$.

Aufgabe 5.4 *Datenübertragung* (10 Punkte)

In einem Rechnernetzwerk gibt es eine Menge erlaubter Pfade, entlang welcher Daten übertragen werden können. Die Übertragungen müssen zeitgleich und kollisionsfrei passieren. Unter dieser Bedingung sollen möglichst viele der Pfade aus der Menge ausgewählt werden.

Das Netzwerk wird durch einen ungerichteten, vollständigen Graphen G mit n Knoten repräsentiert. Die Menge der erlaubten Pfade ist $P = \{p_1, ..., p_m\}$. Das entsprechende Problem ÜBERTRAGUNG fragt danach, ob es für eine gegebene Schranke $k \in \mathbb{N}$ mindestens k knotendisjunkte Pfade in P gibt.

Zeigen Sie, dass ÜBERTRAGUNG $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Hinweis: Eine Reduktion von IS auf dieses Problem ist möglich.