Algorithmen & Datenstrukturen 2
Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Marco Schmalhofer

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 7

Ausgabe: 13.12.2022
Abgabe: 10.01.2023, **08:00**

Aufgabe 7.1 *Lastverteilungsproblem* (5 + 5 + (2+3) Punkte)

Betrachten Sie das Lastverteilungsproblem aus der Vorlesung.

a) Gegeben sei die folgende Instanz für den Off-line-Fall: Es stehen $m = 16$ Prozessoren zur Verfügung, und die Anzahl an Aufgaben ist $n = 74$. Nehmen Sie an, dass 70 dieser Aufgaben Rechenzeit $t_i = 2$ und die vier restlichen Jobs jeweils Rechenzeit $t_j = 5$ benötigen.

   Bestimmen Sie den Approximationsfaktor der Off-line Heuristik auf der obigen Instanz.

b) Konstruieren Sie eine Instanz mit $m = 2$, so dass der Approximationsfaktor der Off-line Heuristik maximal wird, und geben Sie den entsprechenden Approximationsfaktor an. Sie brauchen nicht zu beweisen, dass es keine Instanz mit einem noch höheren Approximationsfaktor gibt.

c) Betrachten Sie den folgenden Algorithmus für den On-line-Fall mit zwei Maschinen m_1 und m_2: Bis einschließlich der zwölften ankommenden Aufgabe werden alle Aufgaben m_1 zugewiesen. Danach geht der Algorithmus wie der On-line Scheduling Algorithmus aus der Vorlesung vor.

   i) Zeigen Sie, dass der obige Algorithmus *mindestens* Approximationsfaktor 2 hat.

   ii) Zeigen Sie, dass der obige Algorithmus *höchstens* Approximationsfaktor 2 hat.

Aufgabe 7.2 *Rucksackproblem* (6 Punkte)

Betrachten Sie das Rucksackproblem aus der Vorlesung. Gegeben seien die beiden folgenden Linearen Programme (LP) für das Problem, wobei das *linke* LP nur *ganzzahlige* Lösungen $x = (x_1, ..., x_n)$ und das *rechte* LP *fraktionale* Lösungen $y = (y_1, ..., y_n)$ berechnet.

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} && \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i, \\ &\text{so dass} && \sum_{i=1}^{n} g_i\, x_i \le G, \\ &&& x_i \in \{0,1\} \quad \text{für alle } i \in \{1,...,n\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} && \sum_{i=1}^{n} w_i\, y_i, \\ &\text{so dass} && \sum_{i=1}^{n} g_i\, y_i \le G, \\ &&& y_i \in [0,1] \quad \text{für alle } i \in \{1,...,n\}. \end{aligned}$$

Sei $g_i \le G$ für alle Gewichte g_i. Geben Sie eine Instanz in Abhängigkeit von einem Parameter ε an, so dass sich der Wert der optimalen ganzzahligen Lösung x^* und der Wert der optimalen fraktionalen Lösung y^* mindestens um Faktor $2 - \varepsilon$ unterscheiden.

Aufgabe 7.3 *Gute Plätzchen* (6 Punkte)

Auf einer Weihnachtsfeier sollen für die Gäste m Stehtische mit leckeren Plätzchen platziert werden. Dabei soll der maximale Fußweg eines jeden Gastes zu einem der Stehtische minimiert werden. Die Räumlichkeit, in der die Feier stattfindet, kann vereinfacht als (eindimensionale) Linie mit Länge 1 betrachtet werden. An jeder Stelle der Linie kann sich ein Gast aufhalten, und ebenso kann an jeder Stelle ein Stehtisch platziert werden.

Die Veranstaltungsleitung möchte wie folgt vorgehen: Der erste Stehtisch wird genau in der Mitte platziert. Alle nachfolgenden Stehtische werden so platziert, dass der Abstand zum nächstgelegenen Stehtisch möglichst groß ist.

Zeigen Sie, dass dieses Vorgehen zu einer 2-approximativen Lösung führt.

Aufgabe 7.4 *Approximatives Wichteln* (5 Punkte)

Eine Gruppe von n Personen möchte dem vorweihnachtlichen Brauch des Wichtelns nachkommen. Aus Furcht vor allzu schlechten Geschenken möchten sie jedoch auf das klassiche Zulosen verzichten. Stattdessen sollen die Paare an Personen, die sich gegenseitig beschenken, auf folgende Weise ermittelt werden: jedem möglichen Paar $\{i, j\}$, mit $i, j \in \{1, ..., n\}$ und $i \neq j$, wird ein Freude-Wert $v_{ij} \geq 0$ zugeordnet. Anschließend werden die Paare gemäß ihrer Freude-Werte in nicht-aufsteigender Reihenfolge sortiert. Ausgehend von dem Paar mit höchstem Wert werden dann die einzelnen Paare der Reihe nach betrachtet und dabei ein Paar genau dann akzeptiert, wenn beide Personen noch nicht Teil eines bis dahin bereits akzeptierten Paares sind. Ziel ist es, die Freude zu maximieren.

Zeigen Sie, dass dieses Vorgehen zu einer 2-approximativen Lösung führt.

Aufgabe 7.5 *Weihnachtsgeschäft* (8 Punkte)

Am letzten Abend des Frankfurter Weihnachtsmarkts hat ein Stand für Erzgebirgische Holzkunst noch n verschiedene Schnitzereien $s_1, s_2, ..., s_n$ in seiner Auslage. Um kurz vor Schluss den Verkauf anzukurbeln, denken sich die Standbetreibenden folgende Aktion aus: Für ein festgelegtes $d \leq n$ dürfen die nächsten m Standbesuchenden $i \in \{1, ..., m\}$ jeweils eine Zusammenstellung Z_i von bis zu d Gegenständen angeben, die sie gerne haben würden, und welchen Preis p_i sie dafür zu zahlen bereit wären. Alle Besuchenden akzeptieren ihre Zusammenstellung nur im vollen Umfang; sie scheiden komplett aus der Aktion aus, wenn sie auch nur einen ihrer gewünschten Gegenstände nicht bekommen können. Die Standbetreibenden wollen ihre Einnahmen maximieren, d.h., die Summe der gezahlten Preise soll so hoch wie möglich sein.

Es liegen nun m solcher Angebote vor. Entwerfen Sie einen d-approximativen Greedy-Algorithmus mit polynomieller Laufzeit, der auswählt, welche der Angebote akzeptiert werden sollen. Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus d-approximativ ist und argumentieren Sie, warum seine Laufzeit polynomiell ist.

**Wir wünschen Ihnen eine schöne Winterpause
und einen guten Rutsch ins Jahr 2023!**

Bei allgemeinen Anmerkungen zu den Übungsaufgaben oder Fragen zum Übungsbetrieb erreichen Sie uns unter der folgenden E-Mail-Adresse: algo222@cs.uni-frankfurt.de.