Algorithmen & Datenstrukturen 2

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Marco Schmalhofer

Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

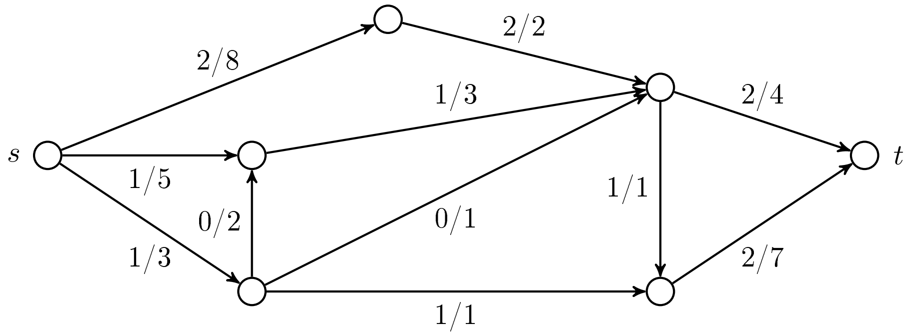
GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungsblatt 9

Ausgabe: 17.01.2023
Abgabe: 24.01.2023, **08:00**

Aufgabe 9.1 *Maximale Flüsse* ((6+2) + 4 Punkte)

a) Betrachten Sie das folgende Flussnetzwerk $G = (V, E, c, s, t)$:



Die Kantenbeschriftungen sind von der Form $f(e)/c(e)$, wobei $f(e)$ den Fluss über die Kante $e \in E$ und $c(e)$ ihre Kapazität bezeichnet.

i) Geben Sie das entsprechende Restnetzwerk G_f mitsamt den entsprechenden Restkapazitäten an und bestimmen Sie einen augmentierenden Pfad in G_f.

ii) Wie hoch ist der maximale Fluss in G? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Vom Ford-Fulkerson Algorithmus erzeugte maximale Flüsse sind immer kreisfrei.

Aufgabe 9.2 *Ford-Fulkerson Algorithmus* (2 + 3 + 5 Punkte)

Betrachten Sie das Max-Flow Problem auf einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c, s, t)$ mit ganzzahligen Kapazitäten. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Anzahl der Iterationen im Ford-Fulkerson Algorithmus bei beliebiger Wahl des augmentierenden Pfades linear in der maximal vorkommenden Kantenkapazität sein kann.

Theo meint, die Rückkanten, die beim Augmentieren eines Pfades eingeführt werden, seien wesentlich verantwortlich für die schlechte Laufzeit. Er schlägt vor, beim Augmentieren keine Rückkanten einzuführen, um die Laufzeit zu verbessern.

a) Zeigen Sie, dass die Laufzeit des Algorithmus ohne Rückkanten $\mathcal{O}(|E|^2)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus ohne Rückkanten nicht immer einen maximalen Fluss berechnet.

c) Zeigen Sie: Es existiert keine Konstante $\delta \geq 1$, so dass der Algorithmus ohne Rückkanten stets δ-approximativ ist.

Aufgabe 9.3 *Defekter Hydrant* (9 Punkte)

Ein defekter Hydrant verliert in Form einer spektakulären Fontäne L Liter Wasser pro Sekunde. Der Hydrant wird aus einer einzigen unerschöpflichen Quelle s gespeist, von der aus das Wasser über ein redundant angelegtes Röhrensystem zum Hydranten t fließt. Das Röhrensystem kann als gerichtetes Flussnetzwerk $G = (V, E, c, s, t)$ modelliert werden, wobei jedes Teilrohr $e \in E$ Kapazität $c(e) = 1$ hat. Die Quelle flutet das Röhrensystem stets so, dass entlang jedes Pfades von s nach t mindestens ein Teilrohr vollständig geflutet ist. In einer Sofortmaßnahme wollen die Stadtwerke die Menge an Wasser, die am Hydranten austreten kann, soweit wie möglich reduzieren. Konkret sollen k Teilrohre abgedichtet werden, so dass durch diese kein Wasser mehr fließen kann.

Beschreiben Sie einen Algorithmus, der k Teilrohre auswählt, die abgedichtet werden müssen, damit die anschließend maximal austretende Menge an Wasser L' (pro Sekunde) so gering wie möglich wird. Ihr Algorithmus soll die Laufzeit $\mathcal{O}\left(|V| \cdot |E|^2\right)$ nicht überschreiten. Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus korrekt ist und dass er die Laufzeitschranke einhält. Geben Sie L' explizit an.

Aufgabe 9.4 *Proporz* (9 Punkte)

Ein breit aufgestellter Sportverein möchte ein neues Vorstandsteam bestimmen. Der Verein hat n Mitglieder $M_1, ..., M_n$ und ist in m Sparten $S_1, ..., S_m$ untergliedert. Jedes Mitglied gehört mindestens einer Sparte an und ist genau einer der zuvor festgelegten r Altersgruppen $A_1, ..., A_r$ zugeordnet. Zuvor hat sich der Verein darauf geeinigt, dass jede Sparte durch ein ihr angehörendes Mitglied im Vorstand vertreten sein muss. Ein Vorstandsmitglied darf aber nicht mehr als eine Sparte repräsentieren. Außerdem wurde festgelegt, dass für jede Altersgruppe A_k höchstens h_k Mitglieder im Vorstandsteam vertreten sein sollen.

Beschreiben Sie, wie mittels eines Flussnetzwerkes bestimmt werden kann, ob ein Vorstandsteam existiert, das die obigen Anforderungen erfüllt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Idee.