Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Marco Schmalhofer

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 10

Ausgabe: 24.01.2023
Abgabe: 31.01.2023, **08:00**

Aufgabe 10.1 *Frachtschiff Algo-2* (5 + 5 Punkte)

Eine Reederei betreibt seit Jahren ein Frachtschiff namens Algo-2. Das Schiff kommt am 31. Januar in seinem Heimathafen an, wo es erneut Fracht aufnehmen soll. Als Fracht stehen zwei Sorten von Schüttgut zur Auswahl. Schüttgut A hat ein spezifisches Gewicht von 1.5 Tonnen pro Kubikmeter, Schüttgut B wiegt lediglich eine halbe Tonne pro Kubikmeter. Der Ertrag pro transportiertem Kubikmeter von Schüttgut A beträgt 4 Euro, bei Schüttgut B gibt es hingegen 6 Euro pro Tonne. In den Laderaum des Schiffs passen 5000 Kubikmeter Schüttgut, die ein Gewicht von 4500 Tonnen nicht überschreiten dürfen. Damit das Schiff stabil im Wasser liegt, muss außerdem der Volumenanteil des Schüttguts A am tatsächlich geladenen Volumen mindestens 20% betragen.

Die Reederei möchte wissen, welches Volumen von Schüttgut A bzw. B von der Algo-2 aufgenommen werden soll, um mit dem Transport maximalen Ertrag einzufahren.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm (LP). Nutzen Sie als Variablen das Volumen der beiden Güter.

b) Lösen Sie das LP aus a) graphisch. Zeichnen Sie insbesondere das Lösungspolytop und markieren Sie das Optimum.

   Welchen Maximalgewinn kann die Reederei erzielen?

Aufgabe 10.2 *Dualität* (5 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Programm (LP):

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Max.} & 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 & & \\
\text{s.d.} & 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 & \leq & -4 \\
& - x_2 + 5x_3 & \leq & 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

Bestimmen Sie das duale lineare Programm gemäß Folie 77 im Foliensatz *Flüsse und Lineare Programmierung*. Geben Sie insbesondere $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ an.

Aufgabe 10.3 *Strikte Ungleichungssysteme* (5 Punkte)

Betrachten Sie ein System aus m strikten Ungleichungen $E_1, \ldots, E_m$ über n reellen Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Jede Ungleichung E_i ist von der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$$

mit reellen Koeffizienten $(a_{ij})_{i=1\ldots m, j=1\ldots n}$ und $(b_i)_{i=1\ldots m}$. Es soll entschieden werden, ob das System lösbar ist.

Modellieren Sie das Problem durch ein lineares Programm (LP), also durch ein System von nicht-strikten linearen Ungleichungen mit einer linearen Zielfunktion. Beschreiben Sie, wie mit einer optimalen Lösung Ihres LP entschieden werden kann, ob das gegebene System eine Lösung hat oder nicht.

Aufgabe 10.4 *Kantenrichtungen* (8 Punkte)

Gegeben sei ein zusammenhängender ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und natürliche Zahlen $d_1, d_2, \ldots, d_n \geq 0$. Die Kanten in G sollen so gerichtet werden, dass der Eingangsgrad von Knoten v_i maximal d_i ist für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus für das Problem. Der Algorithmus soll jeder Kante eine Richtung zuweisen, so dass die Bedingung erfüllt ist oder erkennen, dass dies nicht möglich ist. Begründen Sie die Korrektheit und analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus.

Hinweis: Eine Laufzeit von $\mathcal{O}(|E|^2)$ ist erreichbar.

Aufgabe 10.5 *Kostenoptimale Matchings* (4 + 4 + 4 Punkte)

Sei $G = (A \cup B, E)$ ein bipartiter Graph mit den (nicht notwendigerweise gleich großen) Partitionen A und B sowie nicht-negativen Kantenkosten $c(e) \geq 0$ für jede Kante $e \in E$.

Sie haben Zugriff auf einen Algorithmus *Alg*, welcher bei Eingabe G in polynomieller Zeit entscheidet, ob es ein perfektes Matching in G gibt. Falls ja, gibt der Algorithmus ein perfektes Matching mit minimalen Kosten aus. Falls nein, gibt der Algorithmus $\perp$ aus.

Beschreiben Sie, wie mithilfe des Algorithmus *Alg* in polynomieller Zeit ein

a) ...perfektes Matching mit *minimalen* Kosten in Graphen mit beliebigen (evtl. auch negativen) Kantenkosten berechnet werden kann.

b) ...perfektes Matching mit *maximalen* Kosten in Graphen mit nicht-negativen Kantenkosten berechnet werden kann.

c) ...größtmögliches (engl. maximum) Matching mit *minimalen* Kosten in Graphen mit nicht-negativen Kantenkosten berechnet werden kann.

Begründen Sie jeweils auch, warum ihr Verfahren korrekt ist.