Beweise: Warum?

Wir möchten ein Phänomen erklären.

- Häufig ist das Phänomen aber so komplex, dass eine vollständige Erklärung nicht zu erwarten ist.
  - Partielle Erklärungen wie etwa Erfahrungswerte und Ergebnisse experimenteller Arbeit müssen genügen.

Beweise: Warum?

Wir möchten ein Phänomen erklären.

- Häufig ist das Phänomen aber so komplex, dass eine vollständige Erklärung nicht zu erwarten ist.
  - Partielle Erklärungen wie etwa Erfahrungswerte und Ergebnisse experimenteller Arbeit müssen genügen.
- In einigen Fällen sind aber unumstößlich wahre Aussagen nicht nur möglich, sondern werden sogar verlangt:
  Es genügt nicht, dass eine sicherheitssensitive Software funktionieren ***sollte****, sie* ***muss*** *funktionieren!*

Wir benutzen die Sprache der Mathematik, um die Korrektheit einer Aussage zweifelsfrei nachzuweisen.

Der Umgang mit Quantoren

- Beweise eine ***existentielle Aussagen*** der Form

  „*Es gibt ein Objekt mit der Eigenschaft* E“

  zum Beispiel mit der Methode der **Konstruktion**: Beschreibe ein spezifisches Objekt und weise nach, dass dieses Objekt die Eigenschaft E besitzt.

  - Die existentielle Aussage „*das quadratische Polynom* $x^2 - 1$ *besitzt eine reellwertige Nullstelle*“ ist zu beweisen:

Der Umgang mit Quantoren

- Beweise eine ***existentielle Aussagen*** der Form

  „*Es gibt ein Objekt mit der Eigenschaft E*"

  zum Beispiel mit der Methode der **Konstruktion**: Beschreibe ein spezifisches Objekt und weise nach, dass dieses Objekt die Eigenschaft E besitzt.

  - Die existentielle Aussage „*das quadratische Polynom* $x^2 - 1$ *besitzt eine reellwertige Nullstelle*" ist zu beweisen: Zeige, dass 1 eine Nullstelle ist.

Der Umgang mit Quantoren

- Beweise eine ***existentielle Aussagen*** der Form

  „*Es gibt ein Objekt mit der Eigenschaft E*“

  zum Beispiel mit der Methode der **Konstruktion**: Beschreibe ein spezifisches Objekt und weise nach, dass dieses Objekt die Eigenschaft E besitzt.

  - Die existentielle Aussage „*das quadratische Polynom $x^2 - 1$ besitzt eine reellwertige Nullstelle*“ ist zu beweisen: Zeige, dass 1 eine Nullstelle ist.

- Die ***All-Aussage***

  „*Alle fraglichen Objekte besitzen die Eigenschaft E*“

  ist zu untersuchen.

  - **Widerlege** die All-Aussage mit einem **Gegenbeispiel**: Die existentielle Aussage „*Es gibt ein Objekt mit der Eigenschaft $\neg E$*“ ist die Negation der All-Aussage.
    - Widerlege die All-Aussage „*jedes quadratische Polynom besitzt eine reellwertige Nullstelle*“ durch

Der Umgang mit Quantoren

- Beweise eine ***existentielle Aussagen*** der Form

  „*Es gibt ein Objekt mit der Eigenschaft E*“

  zum Beispiel mit der Methode der **Konstruktion**: Beschreibe ein spezifisches Objekt und weise nach, dass dieses Objekt die Eigenschaft E besitzt.

  - Die existentielle Aussage „*das quadratische Polynom $x^2 - 1$ besitzt eine reellwertige Nullstelle*“ ist zu beweisen: Zeige, dass 1 eine Nullstelle ist.

- Die ***All-Aussage***

  „*Alle fraglichen Objekte besitzen die Eigenschaft E*“

  ist zu untersuchen.

  - **Widerlege** die All-Aussage mit einem **Gegenbeispiel**: Die existentielle Aussage „*Es gibt ein Objekt mit der Eigenschaft $\neg E$*“ ist die Negation der All-Aussage.
    - Widerlege die All-Aussage „*jedes quadratische Polynom besitzt eine reellwertige Nullstelle*“ durch das quadratische Polynom $x^2 + 1$.

Der Umgang mit Quantoren

- Beweise eine ***existentielle Aussagen*** der Form

  „*Es gibt ein Objekt mit der Eigenschaft E*"

  zum Beispiel mit der Methode der **Konstruktion**: Beschreibe ein spezifisches Objekt und weise nach, dass dieses Objekt die Eigenschaft E besitzt.

  - Die existentielle Aussage „*das quadratische Polynom $x^2 - 1$ besitzt eine reellwertige Nullstelle*" ist zu beweisen: Zeige, dass 1 eine Nullstelle ist.

- Die ***All-Aussage***

  „*Alle fraglichen Objekte besitzen die Eigenschaft E*"

  ist zu untersuchen.

  - **Widerlege** die All-Aussage mit einem **Gegenbeispiel**: Die existentielle Aussage „*Es gibt ein Objekt mit der Eigenschaft $\neg E$*" ist die Negation der All-Aussage.
    - Widerlege die All-Aussage „*jedes quadratische Polynom besitzt eine reellwertige Nullstelle*" durch das quadratische Polynom $x^2 + 1$.
  - **Beweise** die All-Aussage durch den Nachweis, dass ein **beliebiges** Objekt die Eigenschaft E besitzt.

Satz, Behauptung und Beweis

1. Ein **Satz** besteht aus **Voraussetzungen** und einer **Behauptung**: Wenn alle Voraussetzungen erfüllt sind, dann muss die Behauptung wahr sein.
2. Der **Beweis** eines Satzes muss nachweisen, dass die Behauptung des Satzes wahr ist und kann dabei verwenden:
   - die Voraussetzungen des Satzes,
   - Definitionen
   - bereits bekannte Tatsachen und Sätze,
   - im Beweis selbst oder anderswo bereits als wahr bewiesene Aussagen,
   - **logische Schlussregeln**.

Beweise: Typische Fehler

- Wenn eine All-Aussage zu zeigen ist, dann genügt ein „Beweis durch Beispiel“ natürlich nicht: Die Aussage ist nicht nur für einige Beispiele zu verifizieren, sondern ist für alle Instanzen zu zeigen.
- Die Notation kann uns einen Streich spielen, wenn gleiche Symbole zur Bezeichnung verschiedener Dinge verwendet werden.
- Die Bedeutung eingeführter Begriffe muss klar sein und darf nicht vom Kontext abhängen.
- Unzulässige Gedankensprünge beim Schlussfolgern bedeuten, dass das Argument unvollständig ist und
- das Ausnutzen von bis dahin noch unbewiesenen Behauptungen ist ein Fehler im Argument.

Hilft uns die Aussagenlogik?

Bisher haben wir semantische Folgerungen $\Phi \models \phi$ für aussagenlogische Formeln bewiesen.

Jetzt sind kompliziertere Aussagen

möglicherweise mit Quantoren, Relationen und Funktionen zu

beweisen. Trotzdem wird uns die Aussagenlogik helfen!

Logische Schlussregeln

ϕ und ψ sind beliebige, nicht notwendigerweise aussagenlogische Aussagen.

1. Ein **direkter Beweis** geht „ohne Umschweife“ vor.

Logische Schlussregeln

ϕ und ψ sind beliebige, nicht notwendigerweise aussagenlogische Aussagen.

1. Ein **direkter Beweis** geht „ohne Umschweife“ vor.
2. **Indirekte Beweise**:
   - Die Beweismethode der **Kontraposition** für den Nachweis einer Implikation $\phi \rightarrow \psi$ beruht auf der Äquivalenz

$$(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\psi \rightarrow \neg\phi).$$

Logische Schlussregeln

ϕ und ψ sind beliebige, nicht notwendigerweise aussagenlogische Aussagen.

1. Ein **direkter Beweis** geht „ohne Umschweife“ vor.
2. **Indirekte Beweise**:
   - Die Beweismethode der **Kontraposition** für den Nachweis einer Implikation $\phi \to \psi$ beruht auf der Äquivalenz

     $$(\phi \to \psi) \equiv (\neg\psi \to \neg\phi).$$

     Um die Implikation $\phi \to \psi$ zu beweisen:
     - ⋆ Nimm an, dass $\neg\psi$ gilt und zeige die Aussage $\neg\phi$.

Logische Schlussregeln

ϕ und ψ sind beliebige, nicht notwendigerweise aussagenlogische Aussagen.

1. Ein **direkter Beweis** geht „ohne Umschweife“ vor.
2. **Indirekte Beweise**:
   - Die Beweismethode der **Kontraposition** für den Nachweis einer Implikation $\phi \to \psi$ beruht auf der Äquivalenz

     $$(\phi \to \psi) \equiv (\neg\psi \to \neg\phi).$$

     Um die Implikation $\phi \to \psi$ zu beweisen:
     - Nimm an, dass $\neg\psi$ gilt und zeige die Aussage $\neg\phi$.
   - Zeige eine Implikation $\phi \to \psi$ mit **Beweis durch Widerspruch**: Benutze die Äquivalenz

     $$(\phi \to \psi) \equiv ((\phi \land \neg\psi) \to \mathbf{0}).$$

Logische Schlussregeln

ϕ und ψ sind beliebige, nicht notwendigerweise aussagenlogische Aussagen.

1. Ein **direkter Beweis** geht „ohne Umschweife“ vor.
2. **Indirekte Beweise**:
   - Die Beweismethode der **Kontraposition** für den Nachweis einer Implikation $\phi \to \psi$ beruht auf der Äquivalenz

     $$(\phi \to \psi) \equiv (\neg\psi \to \neg\phi).$$

     Um die Implikation $\phi \to \psi$ zu beweisen:
     - ⋆ Nimm an, dass $\neg\psi$ gilt und zeige die Aussage $\neg\phi$.
   - Zeige eine Implikation $\phi \to \psi$ mit **Beweis durch Widerspruch**: Benutze die Äquivalenz

     $$(\phi \to \psi) \equiv ((\phi \wedge \neg\psi) \to \mathbf{0}).$$

     Um $\phi \to \psi$ zu beweisen:
     - ⋆ Nimm an, dass die Voraussetzung ϕ wahr, der Schluss ψ aber falsch ist und leite einen Widerspruch her, d.h. folgere eine falsche Aussage.

Logische Schlussregeln

ϕ und ψ sind beliebige, nicht notwendigerweise aussagenlogische Aussagen.

1. Ein **direkter Beweis** geht „ohne Umschweife“ vor.
2. **Indirekte Beweise**:
   - Die Beweismethode der **Kontraposition** für den Nachweis einer Implikation $\phi \to \psi$ beruht auf der Äquivalenz

     $$(\phi \to \psi) \equiv (\neg\psi \to \neg\phi).$$

     Um die Implikation $\phi \to \psi$ zu beweisen:
     - ⋆ Nimm an, dass $\neg\psi$ gilt und zeige die Aussage $\neg\phi$.
   - Zeige eine Implikation $\phi \to \psi$ mit **Beweis durch Widerspruch**: Benutze die Äquivalenz

     $$(\phi \to \psi) \equiv ((\phi \wedge \neg\psi) \to \mathbf{0}).$$

     Um $\phi \to \psi$ zu beweisen:
     - ⋆ Nimm an, dass die Voraussetzung ϕ wahr, der Schluss ψ aber falsch ist und leite einen Widerspruch her, d.h. folgere eine falsche Aussage.
3. Später wenden wir die mächtige Methode der **vollständigen Induktion** an.

Direkte Beweise

Zeige: Eine endliche Menge M hat genau $2^{|M|}$ Teilmengen

Das Argument besteht aus drei Beweisschritten:

Zeige: Eine endliche Menge M hat genau $2^{|M|}$ Teilmengen

Das Argument besteht aus drei Beweisschritten:

1. Konstruiere eine bijektive Funktion

$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$$

   von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$. Wie?

Zeige: Eine endliche Menge M hat genau $2^{|M|}$ Teilmengen

Das Argument besteht aus drei Beweisschritten:

1. Konstruiere eine bijektive Funktion

$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$$

   von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$. Wie?
   - $\mathcal{P}(M)$ und $\mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$ sind also gleichgroß.

Zeige: Eine endliche Menge M hat genau $2^{|M|}$ Teilmengen

Das Argument besteht aus drei Beweisschritten:

1. Konstruiere eine bijektive Funktion

$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$$

   von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$. Wie?
   - $\mathcal{P}(M)$ und $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ sind also gleichgroß.
2. Dann baue eine bijektive Funktion

$$g : \mathrm{Abb}(A, B) \to B^{|A|}$$

   von der Menge der Abbildungen in das kartesische Produkt $B^{|A|}$. Wie?

Zeige: Eine endliche Menge M hat genau $2^{|M|}$ Teilmengen

Das Argument besteht aus drei Beweisschritten:

1. Konstruiere eine bijektive Funktion

$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$$

   von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$. Wie?
   - $\mathcal{P}(M)$ und $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ sind also gleichgroß.
2. Dann baue eine bijektive Funktion

$$g : \mathrm{Abb}(A, B) \to B^{|A|}$$

   von der Menge der Abbildungen in das kartesische Produkt $B^{|A|}$. Wie?
   Also folgt

$$|\mathrm{Abb}(A, B)| = |B|^{|A|}.$$

Zeige: Eine endliche Menge M hat genau $2^{|M|}$ Teilmengen

Das Argument besteht aus drei Beweisschritten:

1. Konstruiere eine bijektive Funktion
$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$$
von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$. Wie?
   - $\mathcal{P}(M)$ und $\mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$ sind also gleichgroß.
2. Dann baue eine bijektive Funktion
$$g : \mathrm{Abb}(A, B) \to B^{|A|}$$
von der Menge der Abbildungen in das kartesische Produkt $B^{|A|}$. Wie?
Also folgt
$$|\mathrm{Abb}(A, B)| = |B|^{|A|}.$$
3. Setze $A = M$ und $B = \{0,1\}$. Es folgt
$$|\mathcal{P}(M)| \stackrel{1.}{=} |\mathrm{Abb}(M, \{0,1\})|$$

Zeige: Eine endliche Menge M hat genau $2^{|M|}$ Teilmengen

Das Argument besteht aus drei Beweisschritten:

1. Konstruiere eine bijektive Funktion
$$f : \mathcal{P}(M) \to \text{Abb}(M, \{0,1\})$$
von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ nach $\text{Abb}(M, \{0,1\})$. Wie?
    - $\mathcal{P}(M)$ und $\text{Abb}(M, \{0,1\})$ sind also gleichgroß.
2. Dann baue eine bijektive Funktion
$$g : \text{Abb}(A, B) \to B^{|A|}$$
von der Menge der Abbildungen in das kartesische Produkt $B^{|A|}$. Wie?
Also folgt
$$|\text{Abb}(A, B)| = |B|^{|A|}.$$
3. Setze $A = M$ und $B = \{0,1\}$. Es folgt
$$|\mathcal{P}(M)| \overset{1.}{=} |\text{Abb}(M, \{0,1\})| \overset{2.}{=} |\{0,1\}|^{|M|} = 2^{|M|}.$$

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reellen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (1/2)

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reellen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (1/2)

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.
3. Wir multiplizieren mit 4 und erhalten $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$.

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.
3. Wir multiplizieren mit 4 und erhalten $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$.
4. Wenn wir $4a \cdot b$ nach links „bringen“, ist $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ zu zeigen.

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reellen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (1/2)

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.
3. Wir multiplizieren mit 4 und erhalten $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$.
4. Wenn wir $4a \cdot b$ nach links „bringen“, ist $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ zu zeigen.
   - $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$ gilt.
   - Jedes Quadrat ist nicht-negativ und die Ungleichung stimmt!?!

Das ist leider kein Beweis, weil ....

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reellen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (1/2)

Zuerst versuchen wir eine Beweisidee zu erhalten.

1. Die Wurzel stört und wir quadrieren:
   - Statt $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ zeige die Ungleichung $(\frac{a+b}{2})^2 \geqslant a \cdot b$.
2. Wir multiplizieren aus und erhalten die Ungleichung $\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4} \geqslant a \cdot b$.
3. Wir multiplizieren mit 4 und erhalten $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$.
4. Wenn wir $4a \cdot b$ nach links „bringen“, ist $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ zu zeigen.
   - $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$ gilt.
   - Jedes Quadrat ist nicht-negativ und die Ungleichung stimmt!?!

Das ist leider kein Beweis, weil ....
.... wir **aus** der Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ eine wahre Aussage folgern :-((

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ für alle reellen Zahlen $a, b \geqslant 0$ (2/2)

Hoffentlich haben wir nur mit äquivalenten Umformungen gearbeitet: Mal sehen.

Hoffentlich haben wir nur mit äquivalenten Umformungen gearbeitet: Mal sehen.

1. $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$ gilt und $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ folgt.

Hoffentlich haben wir nur mit äquivalenten Umformungen gearbeitet: Mal sehen.

1. $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$ gilt und $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ folgt.
2. Wir addieren $4a \cdot b$ auf beide Seiten: $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$ gilt ebenfalls.

Hoffentlich haben wir nur mit äquivalenten Umformungen gearbeitet: Mal sehen.

1. $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$ gilt und $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ folgt.
2. Wir addieren $4a \cdot b$ auf beide Seiten: $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$ gilt ebenfalls.
3. Die linke Seite der Ungleichung stimmt mit $(a+b)^2$ überein: Es gilt also

$$(a+b)^2 \geqslant 4a \cdot b.$$

Hoffentlich haben wir nur mit äquivalenten Umformungen gearbeitet: Mal sehen.

1. $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$ gilt und $a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geqslant 0$ folgt.
2. Wir addieren $4a \cdot b$ auf beide Seiten: $a^2 + 2a \cdot b + b^2 \geqslant 4a \cdot b$ gilt ebenfalls.
3. Die linke Seite der Ungleichung stimmt mit $(a+b)^2$ überein: Es gilt also
$$(a+b)^2 \geqslant 4a \cdot b.$$
4. Wir dividieren beide Seiten durch 4 und ziehen die Wurzel:
$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$
und das war zu zeigen.

Na, geht doch!

Indirekte Beweise: Kontraposition

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$m = 2k + 1.$$

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$m = 2k + 1.$$
2. n ist nach Annahme ungerade und es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k + 1$.
3. Wir quadrieren n und erhalten
$$n^2 = (2k + 1)^2 =$$

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$m = 2k + 1.$$
2. n ist nach Annahme ungerade und es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k + 1$.
3. Wir quadrieren n und erhalten
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$m = 2k + 1.$$
2. n ist nach Annahme ungerade und es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k + 1$.
3. Wir quadrieren n und erhalten
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade

Im Beweis durch Kontraposition genügt der Nachweis,

Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade.

1. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist **genau dann** ungerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$m = 2k + 1.$$
2. n ist nach Annahme ungerade und es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k + 1$.
3. Wir quadrieren n und erhalten
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$
und damit ist auch n^2 ungerade.

Indirekte Beweise: Beweis durch Widerspruch

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und leiten einen Widerspruch her.

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und leiten einen Widerspruch her.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und leiten einen Widerspruch her.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und leiten einen Widerspruch her.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. $\Longrightarrow p^2$ ist eine gerade Zahl.

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und leiten einen Widerspruch her.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. $\Longrightarrow$ p^2 ist eine gerade Zahl.
   - Wir haben aber gerade gezeigt, dass dann auch **p gerade** ist.
   - Wenn $p = 2r$, dann folgt also $p^2 =$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und leiten einen Widerspruch her.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. $\Longrightarrow$ p^2 ist eine gerade Zahl.
   - Wir haben aber gerade gezeigt, dass dann auch **p gerade** ist.
   - Wenn $p = 2r$, dann folgt also $p^2 = 4r^2$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und leiten einen Widerspruch her.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. $\Longrightarrow p^2$ ist eine gerade Zahl.
   - Wir haben aber gerade gezeigt, dass dann auch **p gerade** ist.
   - Wenn $p = 2r$, dann folgt also $p^2 = 4r^2 = 2q^2$ und damit $2r^2 = q^2$.

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und leiten einen Widerspruch her.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. $\Longrightarrow$ p^2 ist eine gerade Zahl.
   - Wir haben aber gerade gezeigt, dass dann auch **p gerade** ist.
   - Wenn $p = 2r$, dann folgt also $p^2 = 4r^2 = 2q^2$ und damit $2r^2 = q^2$.
4. Dann ist aber q^2 gerade und damit auch **q**

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und leiten einen Widerspruch her.

1. Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann gibt es **teilerfremde** Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
2. Wir quadrieren und erhalten die Gleichung
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$
3. $\Longrightarrow$ p^2 ist eine gerade Zahl.
   - Wir haben aber gerade gezeigt, dass dann auch **p gerade** ist.
   - Wenn $p = 2r$, dann folgt also $p^2 = 4r^2 = 2q^2$ und damit $2r^2 = q^2$.
4. Dann ist aber q^2 gerade und damit auch **q** $\Longrightarrow$ Die Zahlen p und q haben den gemeinsamen Teiler 2 im **Widerspruch** zur Teilerfremdheit $\lightning$

Die Grundlage der Public-Key Kryptographie

Eine Primzahl ist eine Zahl größer als Eins, die nur durch Eins und sich selbst teilbar ist.

Der Satz von Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Die Grundlage der Public-Key Kryptographie

Eine Primzahl ist eine Zahl größer als Eins, die nur durch Eins und sich selbst teilbar ist.

Der Satz von Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, nämlich $p_1, \ldots, p_n$.

1. Betrachte die Zahl $N = p_1 \cdots p_n + 1$.

Die Grundlage der Public-Key Kryptographie

Eine Primzahl ist eine Zahl größer als Eins, die nur durch Eins und sich selbst teilbar ist.

Der Satz von Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, nämlich $p_1, \ldots, p_n$.

1. Betrachte die Zahl $N = p_1 \cdots p_n + 1$.
   - Alle Primzahlen teilen die Zahl $N - 1$ und können deshalb N nicht teilen.

Die Grundlage der Public-Key Kryptographie

Eine Primzahl ist eine Zahl größer als Eins, die nur durch Eins und sich selbst teilbar ist.

Der Satz von Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, nämlich $p_1, \ldots, p_n$.

1. Betrachte die Zahl $N = p_1 \cdots p_n + 1$.
   - Alle Primzahlen teilen die Zahl $N - 1$ und können deshalb N nicht teilen.
2. Jede natürliche Zahl und damit auch N ist ein Produkt von Primzahlen.
   - Alle Primteiler von N sind von $p_1, \ldots, p_n$ verschieden. $\lightning$

Diagonalisierung

Es gibt **keine** surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\Longrightarrow$ Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist „**sehr viel**“ größer als $\mathbb{N}$.

Die Methode der Diagonalisierung (1/3)

Es gibt **keine** surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\Longrightarrow$ Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist „**sehr viel**“ größer als $\mathbb{N}$.

$\Longrightarrow$ Es gibt „sehr viel mehr“ algorithmische Probleme als Python-Programme!

Die Methode der Diagonalisierung (1/3)

Es gibt **keine** surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\Longrightarrow$ Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist „**sehr viel**" größer als $\mathbb{N}$.

$\Longrightarrow$ Es gibt „sehr viel mehr" algorithmische Probleme als Python-Programme!

1. Im **Beweis durch Widerspruch** nehmen wir an, dass die Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

surjektiv ist.

Es gibt **keine** surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\Longrightarrow$ Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist „**sehr viel**“ größer als $\mathbb{N}$.

$\Longrightarrow$ Es gibt „sehr viel mehr“ algorithmische Probleme als Python-Programme!

1. Im **Beweis durch Widerspruch** nehmen wir an, dass die Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

surjektiv ist.

2. Die zentrale Idee: Wir definieren die Menge

$$M \ := \ \{\, n \in \mathbb{N} \ : \ n \notin f(n) \,\},$$

die offensichtlich eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist: Also gilt $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Es gibt **keine** surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\Longrightarrow$ Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist „**sehr viel**“ größer als $\mathbb{N}$.

$\Longrightarrow$ Es gibt „sehr viel mehr“ algorithmische Probleme als Python-Programme!

1. Im **Beweis durch Widerspruch** nehmen wir an, dass die Funktion
$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$$
surjektiv ist.
2. Die zentrale Idee: Wir definieren die Menge
$$M \;:=\; \{\, n \in \mathbb{N} \;:\; n \notin f(n) \,\},$$
die offensichtlich eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist: Also gilt $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
3. **Zeige**: M liegt nicht im Bild von f. ↯

Die Methode der Diagonalisierung (2/3)

Wie ist Cantor auf die Idee gekommen, die Menge M so zu definieren?

Baue eine Tabelle, so dass Zeile n die Menge $f(n)$ „Element für Element“ beschreibt.

Die Methode der Diagonalisierung (2/3)

Wie ist Cantor auf die Idee gekommen, die Menge M so zu definieren?

Baue eine Tabelle, so dass Zeile n die Menge $f(n)$ „Element für Element“ beschreibt.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \cdots \\
\hline
\mathbf{0} & a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & a_{0,4} & a_{0,5} & \cdots \\
\mathbf{1} & a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & \cdots \\
\mathbf{2} & a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & \cdots \\
\mathbf{3} & a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots \\
\mathbf{4} & a_{4,0} & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & \cdots \\
\mathbf{5} & a_{5,0} & a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

wobei $a_{i,j} \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } j \in f(i) \\ 0 & \text{falls } j \notin f(i). \end{cases}$ der Eintrag in Zeile i und Spalte j ist.

Die Methode der Diagonalisierung (3/3)

1. Wenn die Menge M sich von *jeder* Menge $f(n)$
   – also von *jeder* Zeile unterscheidet –, dann liegt M nicht im Bild von f.

Die Methode der Diagonalisierung (3/3)

1. Wenn die Menge M sich von *jeder* Menge $f(n)$
   – also von *jeder* Zeile unterscheidet –, dann liegt M nicht im Bild von f.

2. Wie ist M zu definieren, so dass sich M von der Menge $f(n)$ unterscheidet?

1. Wenn die Menge M sich von *jeder* Menge $f(n)$
   – also von *jeder* Zeile unterscheidet –, dann liegt M nicht im Bild von f.

2. Wie ist M zu definieren, so dass sich M von der Menge $f(n)$ unterscheidet?
   M und $f(n)$ sollen sich auf der **Diagonalen**, also für Element n unterscheiden.
   - Wenn $n \in f(n)$, dann

Die Methode der Diagonalisierung (3/3)

1. Wenn die Menge M sich von *jeder* Menge $f(n)$
   – also von *jeder* Zeile unterscheidet –, dann liegt M nicht im Bild von f.

2. Wie ist M zu definieren, so dass sich M von der Menge $f(n)$ unterscheidet?
   M und $f(n)$ sollen sich auf der **Diagonalen**, also für Element n unterscheiden.
   - Wenn $n \in f(n)$, dann darf M das Element n nicht enthalten: Also $n \notin M$.

1. Wenn die Menge M sich von *jeder* Menge $f(n)$
   – also von *jeder* Zeile unterscheidet –, dann liegt M nicht im Bild von f.

2. Wie ist M zu definieren, so dass sich M von der Menge $f(n)$ unterscheidet?
   M und $f(n)$ sollen sich auf der **Diagonalen**, also für Element n unterscheiden.
   - Wenn $n \in f(n)$, dann darf M das Element n nicht enthalten: Also $n \notin M$.
   - Wenn $n \notin f(n)$, dann

1. Wenn die Menge M sich von *jeder* Menge $f(n)$
   – also von *jeder* Zeile unterscheidet –, dann liegt M nicht im Bild von f.

2. Wie ist M zu definieren, so dass sich M von der Menge $f(n)$ unterscheidet?
   M und $f(n)$ sollen sich auf der **Diagonalen**, also für Element n unterscheiden.
   - Wenn $n \in f(n)$, dann darf M das Element n nicht enthalten: Also $n \notin M$.
   - Wenn $n \notin f(n)$, dann muss M das Element n enthalten: Also $n \in M$.

1. Wenn die Menge M sich von *jeder* Menge $f(n)$
   – also von *jeder* Zeile unterscheidet –, dann liegt M nicht im Bild von f.

2. Wie ist M zu definieren, so dass sich M von der Menge $f(n)$ unterscheidet?
   M und $f(n)$ sollen sich auf der **Diagonalen**, also für Element n unterscheiden.
   - Wenn $n \in f(n)$, dann darf M das Element n nicht enthalten: Also $n \notin M$.
   - Wenn $n \notin f(n)$, dann muss M das Element n enthalten: Also $n \in M$.

3. $\Longrightarrow \quad M = \{\, n \in \mathbb{N} : n \notin f(n) \,\}$

1. Wenn die Menge M sich von *jeder* Menge $f(n)$
   – also von *jeder* Zeile unterscheidet –, dann liegt M nicht im Bild von f.

2. Wie ist M zu definieren, so dass sich M von der Menge $f(n)$ unterscheidet?
   M und $f(n)$ sollen sich auf der **Diagonalen**, also für Element n unterscheiden.
   - Wenn $n \in f(n)$, dann darf M das Element n nicht enthalten: Also $n \notin M$.
   - Wenn $n \notin f(n)$, dann muss M das Element n enthalten: Also $n \in M$.

3. $\Longrightarrow \quad M = \{ n \in \mathbb{N} : n \notin f(n) \} \neq f(m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Die Methode der Diagonalisierung (3/3)

1. Wenn die Menge M sich von *jeder* Menge $f(n)$
   – also von *jeder* Zeile unterscheidet –, dann liegt M nicht im Bild von f.

2. Wie ist M zu definieren, so dass sich M von der Menge $f(n)$ unterscheidet?
   M und $f(n)$ sollen sich auf der **Diagonalen**, also für Element n unterscheiden.
   - Wenn $n \in f(n)$, dann darf M das Element n nicht enthalten: Also $n \notin M$.
   - Wenn $n \notin f(n)$, dann muss M das Element n enthalten: Also $n \in M$.

3. $\Longrightarrow \quad M = \{\, n \in \mathbb{N} \,:\, n \notin f(n) \,\} \neq f(m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Der Beweis zeigt sogar mehr:

Für **keine** Menge X gibt es eine surjektive Funktion $f : X \to \mathcal{P}(X)$.

Und was hat das mit Informatik zu tun?

1. Jedes Python-Programm P lässt sich als natürliche Zahl **ID(P)** kodieren.
   - Definere zum Beispiel **ID(P)** durch die interne Darstellung von Programm P.

Und was hat das mit Informatik zu tun?

1. Jedes Python-Programm P lässt sich als natürliche Zahl **ID(P)** kodieren.
   - Definere zum Beispiel **ID(P)** durch die interne Darstellung von Programm P.
   - Es gibt (höchstens) so viele Python-Programme wie natürliche Zahlen.

Und was hat das mit Informatik zu tun?

1. Jedes Python-Programm P lässt sich als natürliche Zahl **ID(P)** kodieren.
   - Definere zum Beispiel **ID(P)** durch die interne Darstellung von Programm P.
   - Es gibt (höchstens) so viele Python-Programme wie natürliche Zahlen.
2. Können Python-Programme alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ berechnen?
   - Es gibt genau so viele Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ wie es Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt.

Und was hat das mit Informatik zu tun?

1. Jedes Python-Programm P lässt sich als natürliche Zahl **ID(P)** kodieren.
   - Definere zum Beispiel **ID(P)** durch die interne Darstellung von Programm P.
   - Es gibt (höchstens) so viele Python-Programme wie natürliche Zahlen.
2. Können Python-Programme alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ berechnen?
   - Es gibt genau so viele Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ wie es Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt.
   - Aber wir haben gerade gezeigt, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sehr viel größer als $\mathbb{N}$ ist!

Und was hat das mit Informatik zu tun?

1. Jedes Python-Programm P lässt sich als natürliche Zahl **ID(P)** kodieren.
   - Definere zum Beispiel **ID(P)** durch die interne Darstellung von Programm P.
   - Es gibt (höchstens) so viele Python-Programme wie natürliche Zahlen.

2. Können Python-Programme alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ berechnen?
   - Es gibt genau so viele Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ wie es Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt.
   - Aber wir haben gerade gezeigt, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sehr viel größer als $\mathbb{N}$ ist!

Die **meisten** Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ können **nicht** durch Python-Programme berechnet werden.

Vollständige Induktion

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.

Zeige: $A(n)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.

Zeige: $A(n)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(a) **INDUKTIONSANFANG** bzw. **INDUKTIONSBASIS:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **INDUKTIONSSCHRITT:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.

Zeige: $A(n)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(a) **INDUKTIONSANFANG** bzw. **INDUKTIONSBASIS:**
Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **INDUKTIONSSCHRITT:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Wenn (a) und (b) bewiesen sind, dann wird eine **Lawine** losgetreten:

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.

Zeige: $A(n)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(a) **INDUKTIONSANFANG** bzw. **INDUKTIONSBASIS:** Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **INDUKTIONSSCHRITT:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Wenn (a) und (b) bewiesen sind, dann wird eine **Lawine** losgetreten:

1. $A(0)$ ist wahr gemäß Induktionsanfang (a).
2. $A(1)$ ist wahr gemäß 1. und Induktionsschritt (b) für $n = 0$,
3. $A(2)$ ist wahr gemäß 2. und Induktionsschritt (b) für $n = 1$,
4. $A(3)$ ist wahr gemäß 3. und Induktionsschritt (b) für $n = 2$,
5. $A(4)$ ist wahr gemäß 4. und Induktionsschritt (b) für $n = 3$,

....

Die Grundidee der vollständigen Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage über die natürliche Zahl n.

Zeige: $A(n)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(a) **INDUKTIONSANFANG** bzw. **INDUKTIONSBASIS:** Zuerst zeige, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

(b) **INDUKTIONSSCHRITT:** Für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zeige die Aussage $A(n+1)$, falls die *Induktionsannahme* $A(n)$ wahr ist.

Wenn (a) und (b) bewiesen sind, dann wird eine **Lawine** losgetreten:

1. $A(0)$ ist wahr gemäß Induktionsanfang (a).
2. $A(1)$ ist wahr gemäß 1. und Induktionsschritt (b) für $n = 0$,
3. $A(2)$ ist wahr gemäß 2. und Induktionsschritt (b) für $n = 1$,
4. $A(3)$ ist wahr gemäß 3. und Induktionsschritt (b) für $n = 2$,
5. $A(4)$ ist wahr gemäß 4. und Induktionsschritt (b) für $n = 3$,

....

Insgesamt hat man damit gezeigt, dass die Aussage $A(n)$ **für alle** $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Es ist richtig dunkel

Wir befinden uns in einem stockdunklem Gang, der nach einer Seite unbeschränkt lang ist. Den Gang können wir nur über die andere Seite verlassen.

? Was tun, wir kennen noch nicht einmal die Länge **n** des Weges bis zum Ende des Ganges!?!

Es ist richtig dunkel

Wir befinden uns in einem stockdunklem Gang, der nach einer Seite unbeschränkt lang ist. Den Gang können wir nur über die andere Seite verlassen.

? Was tun, wir kennen noch nicht einmal die Länge **n** des Weges bis zum Ende des Ganges!?!

Wie können wir mit möglichst wenigen Schritten den Gang verlassen?

- Wie wär's mit:
  Ein Schritt nach „vorn“, zwei zurück, drei nach vorn, vier zurück, ...
- Und wieviele Schritte sind das?

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$:

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i =$

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - ⋆ Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) \cdot (n+2)/2$.
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} i =$

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) \cdot (n+2)/2$.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{IA}{=}$

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) \cdot (n+2)/2$.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \stackrel{IA}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) =$

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - ⋆ Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) \cdot (n+2)/2$.
    - ⋆ $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \stackrel{IA}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} =$

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) \cdot (n+2)/2$.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \stackrel{IA}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ und das war zu zeigen. ✓

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) \cdot (n+2)/2$.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \stackrel{IA}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ und das war zu zeigen. ✓
- Ein direkter Beweis:

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) \cdot (n+2)/2$.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{IA}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ und das war zu zeigen. ✓
- Ein direkter Beweis:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte oberhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) \cdot (n+2)/2$.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{IA}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ und das war zu zeigen. ✓
- Ein direkter Beweis:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte oberhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte und oberhalb der Hauptdiagonale befindet sich die Hälfte der verbleibenden $n^2 - n$ Gitterpunkte.

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0\cdot(0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1)\cdot(n+2)/2$.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{IA}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ und das war zu zeigen. ✓
- Ein direkter Beweis:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte oberhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte und oberhalb der Hauptdiagonale befindet sich die Hälfte der verbleibenden $n^2 - n$ Gitterpunkte. Also folgt $\sum_{i=1}^{n} i =$

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) \cdot (n+2)/2$.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \stackrel{IA}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ und das war zu zeigen. ✓
- Ein direkter Beweis:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte oberhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte und oberhalb der Hauptdiagonale befindet sich die Hälfte der verbleibenden $n^2 - n$ Gitterpunkte. Also folgt $\sum_{i=1}^{n} i = n +$

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) \cdot (n+2)/2$.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \stackrel{IA}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ und das war zu zeigen. ✓
- Ein direkter Beweis:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte oberhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte und oberhalb der Hauptdiagonale befindet sich die Hälfte der verbleibenden $n^2 - n$ Gitterpunkte. Also folgt $\sum_{i=1}^{n} i = n + \frac{n^2 - n}{2}$

Die Summe der ersten n Zahlen

Behauptung: $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ und $\frac{0\cdot(0+1)}{2} = 0$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
    - Wir können die *Induktionsannahme* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1)\cdot(n+2)/2$.
    - $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{IA}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ und das war zu zeigen. ✓

- Ein direkter Beweis:
  - Betrachte ein Gitter mit n Zeilen und n Spalten: n^2 Gitterpunkte.
  - Wir müssen die Gitterpunkte oberhalb der Hauptdiagonale und auf der Hauptdiagonale zählen.
  - Die Hauptdiagonale besitzt n Gitterpunkte und oberhalb der Hauptdiagonale befindet sich die Hälfte der verbleibenden $n^2 - n$ Gitterpunkte. Also folgt $\sum_{i=1}^{n} i = n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. ✓

Wie viele Schritte?

n sei die Länge des Weges bis zum Ende des Gangs.

Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.

1. Nach $2k$ Wiederholungen sind wir insgesamt

$$(1-2)+(3-4)+\cdots+(2k-1-2k)=-k,$$

also k Schritte zurückgegangen.

Wie viele Schritte?

n sei die Länge des Weges bis zum Ende des Gangs.

Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.

1. Nach $2k$ Wiederholungen sind wir insgesamt

$$(1-2)+(3-4)+\cdots+(2k-1-2k)=-k,$$

   also k Schritte zurückgegangen.

- Um den Gang zu verlassen, müssen wir insgesamt

$$1+2+\cdots+(2n-2)$$

Wie viele Schritte?

n sei die Länge des Weges bis zum Ende des Gangs.

Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.

1. Nach $2k$ Wiederholungen sind wir insgesamt

$$(1-2)+(3-4)+\cdots+(2k-1-2k) = -k,$$

also k Schritte zurückgegangen.

- Um den Gang zu verlassen, müssen wir insgesamt

$$1+2+\cdots+(2n-2)+(2n-1) = \frac{(2n-1)\cdot 2n}{2} = (2n-1)\cdot n$$

Schritte zurücklegen.

Bei quadratisch vielen Schritten werden wir mächtig erschöpft sein!

Sind quadratisch viele Schritte wirklich notwendig?

- Alles auf eine Karte zu setzen, also nur in eine Richtung zu marschieren, ist Unfug.
- Aber können wir etwas mutiger sein, als immer nur einen weiteren Schritt zu wagen?

Sind quadratisch viele Schritte wirklich notwendig?

- Alles auf eine Karte zu setzen, also nur in eine Richtung zu marschieren, ist Unfug.
- Aber können wir etwas mutiger sein, als immer nur einen weiteren Schritt zu wagen?
  - Zum Beispiel,
    ein Schritt nach vorn, zwei zurück, vier nach vorn, acht zurück, ...,
  - Wieviele Schritte brauchen wir diesmal?

Die geometrische Reihe

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$:

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n + 1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i =$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$.

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=0}^{n+1} a^i =$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} \stackrel{IA}{=}$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n=0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. Dann ist
    - $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} \overset{IA}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} =$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. Dann ist
    - $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} \overset{IA}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} =$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. Dann ist
    - $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} \overset{IA}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - ★ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. Dann ist
    - ★ $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} \stackrel{IA}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direkter Beweis:

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - ⋆ Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. Dann ist
    - ⋆ $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} \stackrel{IA}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direkter Beweis:

$$(a-1) \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i \quad = \quad a \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. Dann ist
    - $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} \stackrel{IA}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direkter Beweis:

$$\begin{aligned}(a-1) \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i &= a \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=}\end{aligned}$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n=0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. Dann ist
    - $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} \overset{IA}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direkter Beweis:

$$\begin{aligned}(a-1)\cdot\sum_{i=0}^{n} a^i &= a\cdot\sum_{i=0}^{n} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} a^{n+1} - a^0\end{aligned}$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ falls } a \neq 1.$$

- Vollständige Induktion nach n:
  - **INDUKTIONSANFANG** für $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$ und $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    - Wir können die *Induktionsanahme* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ voraussetzen und müssen zeigen $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. Dann ist
    - $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} \overset{IA}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ ✓
- Ein direkter Beweis:

$$\begin{aligned}(a-1)\cdot\sum_{i=0}^{n} a^i &= a\cdot\sum_{i=0}^{n} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} - 1\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. ✓

Und wie viele Schritte diesmal?

- Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.
- Es gelte $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ und k sei gerade.
  Nach 2^{k+2} Schritten haben wir eine Distanz von

$$\underbrace{(1-2)}_{-2^0}+$$

Und wie viele Schritte diesmal?

- Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.
- Es gelte $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ und k sei gerade.
  Nach 2^{k+2} Schritten haben wir eine Distanz von

$$\underbrace{(1-2)}_{-2^0} + \underbrace{(4-8)}_{-2^2} +$$

Und wie viele Schritte diesmal?

- Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.
- Es gelte $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ und k sei gerade.
  Nach 2^{k+2} Schritten haben wir eine Distanz von

$$\underbrace{(1-2)}_{-2^0} + \underbrace{(4-8)}_{-2^2} + \cdots + \underbrace{(2^k - 2^{k+1})}_{-2^k} + 2^{k+2} \geqslant$$

Und wie viele Schritte diesmal?

- Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.
- Es gelte $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ und k sei gerade.
  Nach 2^{k+2} Schritten haben wir eine Distanz von

$$\underbrace{(1-2)}_{-2^0}+\underbrace{(4-8)}_{-2^2}+\cdots+\underbrace{(2^k-2^{k+1})}_{-2^k}+2^{k+2} \geqslant -2^{k+1}+2^{k+2}$$

Und wie viele Schritte diesmal?

- Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.
- Es gelte $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ und k sei gerade.
  Nach 2^{k+2} Schritten haben wir eine Distanz von

$$\underbrace{(1-2)}_{-2^0} + \underbrace{(4-8)}_{-2^2} + \cdots + \underbrace{(2^k - 2^{k+1})}_{-2^k} + 2^{k+2} \geqslant -2^{k+1} + 2^{k+2} = 2^{k+1}$$

  in der richtigen Richtung zurückgelegt.

Und wie viele Schritte diesmal?

- Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.
- Es gelte $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ und k sei gerade.
  Nach 2^{k+2} Schritten haben wir eine Distanz von

$$\underbrace{(1-2)}_{-2^0} + \underbrace{(4-8)}_{-2^2} + \cdots + \underbrace{(2^k - 2^{k+1})}_{-2^k} + 2^{k+2} \geqslant -2^{k+1} + 2^{k+2} = 2^{k+1}$$

  in der richtigen Richtung zurückgelegt.
- Den rettenden Ausgang erreichen wir also nach höchstens

$$(1+2) + (4+8) + \cdots + (2^k + 2^{k+1}) + 2^{k+2}$$

Und wie viele Schritte diesmal?

- Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.
- Es gelte $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ und k sei gerade.
  Nach 2^{k+2} Schritten haben wir eine Distanz von

$$\underbrace{(1-2)}_{-2^0} + \underbrace{(4-8)}_{-2^2} + \cdots + \underbrace{(2^k - 2^{k+1})}_{-2^k} + 2^{k+2} \geqslant -2^{k+1} + 2^{k+2} = 2^{k+1}$$

  in der richtigen Richtung zurückgelegt.
- Den rettenden Ausgang erreichen wir also nach höchstens

$$(1+2) + (4+8) + \cdots + (2^k + 2^{k+1}) + 2^{k+2} = 2^{k+3} - 1$$

Und wie viele Schritte diesmal?

- Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.
- Es gelte $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ und k sei gerade.
  Nach 2^{k+2} Schritten haben wir eine Distanz von

  $$\underbrace{(1-2)}_{-2^0} + \underbrace{(4-8)}_{-2^2} + \cdots + \underbrace{(2^k - 2^{k+1})}_{-2^k} + 2^{k+2} \geqslant -2^{k+1} + 2^{k+2} = 2^{k+1}$$

  in der richtigen Richtung zurückgelegt.
- Den rettenden Ausgang erreichen wir also nach höchstens

  $$(1+2) + (4+8) + \cdots + (2^k + 2^{k+1}) + 2^{k+2} = 2^{k+3} - 1 < 16 \cdot n - 1$$

  Schritten.

Der stockdunkle Gang: Vorher quadratisch viele Schritte, jetzt

Und wie viele Schritte diesmal?

- Angenommen, wir gehen zuerst in die richtige Richtung.
- Es gelte $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ und k sei gerade.
  Nach 2^{k+2} Schritten haben wir eine Distanz von

$$\underbrace{(1-2)}_{-2^0} + \underbrace{(4-8)}_{-2^2} + \cdots + \underbrace{(2^k - 2^{k+1})}_{-2^k} + 2^{k+2} \geqslant -2^{k+1} + 2^{k+2} = 2^{k+1}$$

  in der richtigen Richtung zurückgelegt.
- Den rettenden Ausgang erreichen wir also nach höchstens

$$(1+2) + (4+8) + \cdots + (2^k + 2^{k+1}) + 2^{k+2} = 2^{k+3} - 1 < 16 \cdot n - 1$$

  Schritten.

Der stockdunkle Gang: Vorher quadratisch viele Schritte, jetzt linear viele!

Rekursiv definierte Funktionen

Rekursive Definitionen

Wir können das Induktionsprinzip auch benutzen, um Funktionen

$$f : \mathbb{N} \to M$$

für eine beliebige Menge M zu definieren. Die Zahlen $k, n_0 \in \mathbb{N}$ seien beliebig.

Rekursive Definitionen

Wir können das Induktionsprinzip auch benutzen, um Funktionen

$$f : \mathbb{N} \to M$$

für eine beliebige Menge M zu definieren. Die Zahlen $k, n_0 \in \mathbb{N}$ seien beliebig.

(1) **REKURSIONSANFANG:** Definiere $f(n_0), f(n_0 + 1), \ldots, f(n_0 + k)$.

(2) **REKURSIONSSCHRITT:** Definiere $f(n + 1)$ für $n \geqslant n_0 + k$ unter Verwendung der Werte $f(n_0), f(n_0 + 1), \ldots, f(n)$.

Eigenschaften rekursiv definierter Funktionen

Um eine Aussage A über die Funktion f herzuleiten, benutze eine „*entsprechende*" Variante der vollständigen Induktion:

(1) **INDUKTIONSANFANG** für $n_0, \ldots, n_0 + k$:
Zeige, dass die Aussagen $A(n_0), A(n_0 + 1), \ldots, A(n_0 + k)$ wahr sind.

(2) **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n + 1$: Zeige, dass $A(n + 1)$ wahr ist, falls die Aussagen $A(n_0), A(n_0 + 1), \ldots, A(n)$ wahr sind.

Die Weizenkornlegende (1/3)

Der Brahmane Sissa ibn Dahir lebte angeblich im dritten oder vierten Jahrhundert n. Chr. in Indien.

- Der indische Herrscher Shihram tyrannisierte damals seine Untertanen und stürzte sein Land in Not und Elend.
- Sissa erfand das Schachspiel (bzw. seine indische Urform Tschaturanga), um die Aufmerksamkeit von Shihram auf seine Fehler zu lenken, ohne ihn zu erzürnen:

  Der König als wichtigste Figur kann ohne Hilfe
  der anderen Figuren nichts ausrichten.

- Als Dank für die anschauliche, aber zugleich unterhaltsame Lehre gewährte Shihram dem Brahmanen einen freien Wunsch.

Der Brahmane Sissa ibn Dahir lebte angeblich im dritten oder vierten Jahrhundert n. Chr. in Indien.

- Der indische Herrscher Shihram tyrannisierte damals seine Untertanen und stürzte sein Land in Not und Elend.
- Sissa erfand das Schachspiel (bzw. seine indische Urform Tschaturanga), um die Aufmerksamkeit von Shihram auf seine Fehler zu lenken, ohne ihn zu erzürnen:

  > *Der König als wichtigste Figur kann ohne Hilfe*
  > *der anderen Figuren nichts ausrichten.*

- Als Dank für die anschauliche, aber zugleich unterhaltsame Lehre gewährte Shihram dem Brahmanen einen freien Wunsch.

Sissa wünschte sich Weizenkörner:

- Auf das erste Feld eines Schachbretts wollte er ein Korn,
- auf das zweite Feld das doppelte, also zwei,
- auf das dritte wiederum die doppelte Menge, also vier und **so weiter**.

Die Weizenkornlegende (2/3)

Shihram lachte und war gleichzeitig erbost über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

- Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung in Empfang genommen habe, hatten die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet.

Die Weizenkornlegende (2/3)

Shihram lachte und war gleichzeitig erbost über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

- Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung in Empfang genommen habe, hatten die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet.
- Der Vorsteher der Kornkammer meldete nach mehreren Tagen ununterbrochener Arbeit, dass er diese Menge Getreidekörner im ganzen Reich nicht aufbringen könne.
  - Auf allen Feldern eines Schachbretts zusammen wären es 18.446.744.073.709.551.615 ($\approx$ 18,45 Trillionen) Weizenkörner.

Shihram lachte und war gleichzeitig erbost über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

- Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung in Empfang genommen habe, hatten die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet.
- Der Vorsteher der Kornkammer meldete nach mehreren Tagen ununterbrochener Arbeit, dass er diese Menge Getreidekörner im ganzen Reich nicht aufbringen könne.
  - Auf allen Feldern eines Schachbretts zusammen wären es 18.446.744.073.709.551.615 ($\approx$ 18,45 Trillionen) Weizenkörner.
- Wie sollte Shihram das Versprechen einlösen?
  - Der Rechenmeister half dem Herrscher aus der Verlegenheit: Er empfahl,

Die Weizenkornlegende (2/3)

Shihram lachte und war gleichzeitig erbost über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

- Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung in Empfang genommen habe, hatten die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet.
- Der Vorsteher der Kornkammer meldete nach mehreren Tagen ununterbrochener Arbeit, dass er diese Menge Getreidekörner im ganzen Reich nicht aufbringen könne.
  - Auf allen Feldern eines Schachbretts zusammen wären es 18.446.744.073.709.551.615 ($\approx$ 18,45 Trillionen) Weizenkörner.
- Wie sollte Shihram das Versprechen einlösen?
  - Der Rechenmeister half dem Herrscher aus der Verlegenheit: Er empfahl, Sissa ibn Dahir solle das Getreide Korn für Korn zählen!

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) =$

Die Weizenkornlegende (3/3)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **REKURSIONSSCHRITT**: $f(n+1) =$

Die Weizenkornlegende (3/3)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **REKURSIONSSCHRITT**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **REKURSIONSSCHRITT**: $f(n + 1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n - 1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) =$

Die Weizenkornlegende (3/3)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **REKURSIONSSCHRITT**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **INDUKTIONSANFANG**: $f(1) = 1$ und

Die Weizenkornlegende (3/3)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **REKURSIONSSCHRITT**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **INDUKTIONSANFANG**: $f(1) = 1$ und $2^{1-1} = 1$. ✓

Die Weizenkornlegende (3/3)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **REKURSIONSSCHRITT**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **INDUKTIONSANFANG**: $f(1) = 1$ und $2^{1-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    Induktionsannahme: $f(n) = 2^{n-1}$, zeige $f(n+1) =$

Die Weizenkornlegende (3/3)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **REKURSIONSSCHRITT**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **INDUKTIONSANFANG**: $f(1) = 1$ und $2^{1-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Induktionsannahme: $f(n) = 2^{n-1}$, zeige $f(n+1) = 2^n$.

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **REKURSIONSSCHRITT**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **INDUKTIONSANFANG**: $f(1) = 1$ und $2^{1-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    Induktionsannahme: $f(n) = 2^{n-1}$, zeige $f(n+1) = 2^n$.

    $$f(n+1) \overset{\text{Rekursionsschritt}}{=} 2 \cdot f(n)$$

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **REKURSIONSSCHRITT**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **INDUKTIONSANFANG**: $f(1) = 1$ und $2^{1-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
    Induktionsannahme: $f(n) = 2^{n-1}$, zeige $f(n+1) = 2^n$.

    $$f(n+1) \overset{\text{Rekursionsschritt}}{=} 2 \cdot f(n) \overset{\text{Induktionsannahme}}{=} 2 \cdot 2^{n-1}$$

Die Weizenkornlegende (3/3)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) = \text{Anzahl der Weizenkörner auf dem } n\text{'ten Feld}$$

- Wir geben eine rekursive Definition von f.
  - **REKURSIONSANFANG**: Es ist $f(1) = 1$ und
  - **REKURSIONSSCHRITT**: $f(n+1) = 2 \cdot f(n)$.
- Wir können einen einfachen Ausdruck für $f(n)$ finden:
  - Die Anzahl der Weizenkörner am n'ten Tag erhalten wir durch $(n-1)$-maliges Verdoppeln.
  - Es „sollte“ $f(n) = 2^{n-1}$ gelten!
- Wir verifizieren „$f(n) = 2^{n-1}$“ durch vollständige Induktion.
  - **INDUKTIONSANFANG**: $f(1) = 1$ und $2^{1-1} = 1$. ✓
  - **INDUKTIONSSCHRITT** von n auf $n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

    Induktionsannahme: $f(n) = 2^{n-1}$, zeige $f(n+1) = 2^n$.

    $$f(n+1) \overset{\text{Rekursionsschritt}}{=} 2 \cdot f(n) \overset{\text{Induktionsannahme}}{=} 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n. \checkmark$$

Die Anzahl der Sissa zustehenden Weizenkörner ist $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$.

Das XOR

Die Paritätsfunktion p_n (1/2)

(a) **REKURSIONSANFANG**: Die Funktion $p_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}$ wird definiert durch $p_1(x_1) := x_1$.

(b) **REKURSIONSSCHRITT**: Definiere die Funktion $p_{n+1} : \{0,1\}^{n+1} \to \{0,1\}$ durch $p_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) := p_n(x_1, \ldots, x_n) \oplus x_{n+1}$.

(a) **REKURSIONSANFANG**: Die Funktion $p_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}$ wird definiert durch $p_1(x_1) := x_1$.

(b) **REKURSIONSSCHRITT**: Definiere die Funktion $p_{n+1} : \{0,1\}^{n+1} \to \{0,1\}$ durch $p_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) := p_n(x_1,\dots,x_n) \oplus x_{n+1}$.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle $x = (x_1,\dots,x_n) \in \{0,1\}^n$ gilt

$$p_n(x) = 1 \iff x \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

Die Parität wird in fehler-korrigierenden Codes z.B. für RAID-Systeme eingesetzt: Das „Flippen" irgendeines Bits ändert die Parität. (Siehe die RAID-Aufgabe.)

(a) **REKURSIONSANFANG**: Die Funktion $p_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}$ wird definiert durch $p_1(x_1) := x_1$.

(b) **REKURSIONSSCHRITT**: Definiere die Funktion $p_{n+1} : \{0,1\}^{n+1} \to \{0,1\}$ durch $p_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) := p_n(x_1, \dots, x_n) \oplus x_{n+1}$.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ gilt

$$p_n(x) = 1 \iff x \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

Die Parität wird in fehler-korrigierenden Codes z.B. für RAID-Systeme eingesetzt: Das „Flippen" irgendeines Bits ändert die Parität. (Siehe die RAID-Aufgabe.)

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ beliebig.

INDUKTIONSANFANG für $n = 1$: Es gilt $p_1(x) = 1$ genau dann, wenn

Die Paritätsfunktion p_n (1/2)

(a) **REKURSIONSANFANG**: Die Funktion $p_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}$ wird definiert durch $p_1(x_1) := x_1$.

(b) **REKURSIONSSCHRITT**: Definiere die Funktion $p_{n+1} : \{0,1\}^{n+1} \to \{0,1\}$ durch $p_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) := p_n(x_1, \ldots, x_n) \oplus x_{n+1}$.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ gilt

$$p_n(x) = 1 \iff x \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

Die Parität wird in fehler-korrigierenden Codes z.B. für RAID-Systeme eingesetzt: Das „Flippen“ irgendeines Bits ändert die Parität. (Siehe die RAID-Aufgabe.)

Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ beliebig.

INDUKTIONSANFANG für $n = 1$: Es gilt $p_1(x) = 1$ genau dann, wenn $x_1 = 1$, d.h. genau dann wenn $x = (x_1)$ eine ungerade Anzahl von Einsen hat. ✓

Die Paritätsfunktion p_n (2/2)

INDUKTIONSSCHRITT von n nach $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige

$$p_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1 \iff (x_1, \ldots, x_{n+1}) \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

für alle Tupel $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}$. Nach Induktionsannahme gilt für alle Tupel $(y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$

$$p_n(y_1, \ldots, y_n) = 1 \iff (y_1, \ldots, y_n) \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

INDUKTIONSSCHRITT von n nach $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige

$$p_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 1 \iff (x_1, \dots, x_{n+1}) \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

für alle Tupel $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}$. Nach Induktionsannahme gilt für alle Tupel $(y_1, \dots, y_n) \in \{0,1\}^n$

$$p_n(y_1, \dots, y_n) = 1 \iff (y_1, \dots, y_n) \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

Es ist $p_{n+1}(x) = p_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) := p_n(x_1, \dots, x_n) \oplus x_{n+1}$. Also folgt

$$p_{n+1}(x) = 1 \qquad \iff$$

Die Paritätsfunktion p_n (2/2)

INDUKTIONSSCHRITT von n nach $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige

$$p_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1 \iff (x_1, \ldots, x_{n+1}) \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

für alle Tupel $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}$. Nach Induktionsannahme gilt für alle Tupel $(y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$

$$p_n(y_1, \ldots, y_n) = 1 \iff (y_1, \ldots, y_n) \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

Es ist $p_{n+1}(x) = p_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) := p_n(x_1, \ldots, x_n) \oplus x_{n+1}$. Also folgt

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) = 1 \quad &\iff \quad \big(\, p_n(x_1, \ldots x_n) = 1 \text{ und } x_{n+1} = 0 \,\big) \text{ oder} \\ & \qquad\quad \big(\, p_n(x_1, \ldots x_n) = 0 \text{ und } x_{n+1} = 1 \,\big) \end{aligned}$$

INDUKTIONSSCHRITT von n nach $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige

$$p_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1 \iff (x_1, \ldots, x_{n+1}) \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

für alle Tupel $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}$. Nach Induktionsannahme gilt für alle Tupel $(y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$

$$p_n(y_1, \ldots, y_n) = 1 \iff (y_1, \ldots, y_n) \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

Es ist $p_{n+1}(x) = p_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) := p_n(x_1, \ldots, x_n) \oplus x_{n+1}$. Also folgt

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x) = 1 \quad &\iff \quad \big(\, p_n(x_1, \ldots x_n) = 1 \text{ und } x_{n+1} = 0 \,\big) \text{ oder} \\
& \quad \big(\, p_n(x_1, \ldots x_n) = 0 \text{ und } x_{n+1} = 1 \,\big) \\
&\overset{\text{Ind.annahme}}{\iff} \quad (x_1, \ldots x_n) \text{ hat ungerade viele Einsen und } x_{n+1} = 0 \\
& \quad \text{oder} \\
& \quad (x_1, \ldots x_n) \text{ hat gerade viele Einsen und } x_{n+1} = 1
\end{aligned}$$

INDUKTIONSSCHRITT von n nach $n+1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige

$$p_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1 \iff (x_1, \ldots, x_{n+1}) \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

für alle Tupel $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}$. Nach Induktionsannahme gilt für alle Tupel $(y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$

$$p_n(y_1, \ldots, y_n) = 1 \iff (y_1, \ldots, y_n) \text{ hat ungerade viele Einsen.}$$

Es ist $p_{n+1}(x) = p_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) := p_n(x_1, \ldots, x_n) \oplus x_{n+1}$. Also folgt

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x) = 1 \quad &\iff \quad \big(\, p_n(x_1, \ldots x_n) = 1 \text{ und } x_{n+1} = 0 \,\big) \text{ oder} \\
& \quad \big(\, p_n(x_1, \ldots x_n) = 0 \text{ und } x_{n+1} = 1 \,\big) \\
&\overset{\text{Ind.annahme}}{\iff} \quad (x_1, \ldots x_n) \text{ hat ungerade viele Einsen und } x_{n+1} = 0 \\
& \qquad\qquad \text{oder} \\
& \quad (x_1, \ldots x_n) \text{ hat gerade viele Einsen und } x_{n+1} = 1 \\
&\iff \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \text{ hat ungerade viele Einsen}
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. ✓

Die Fibonacci-Folge

Karnickel (1/2)

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib(n)}$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib(n)}$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Antwort: $\text{fib}(n)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- **REKURSIONSANFANG**: $\text{fib}(1) \; :=$

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib(n)}$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Antwort: $\text{fib}(n)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- **REKURSIONSANFANG**: $\text{fib}(1) \ := \ 1$ und $\text{fib}(2) \ :=$

Karnickel (1/2)

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib(n)}$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Antwort: $\text{fib}(n)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- **REKURSIONSANFANG**: $\text{fib}(1) \;:=\; 1$ und $\text{fib}(2) \;:=\; 1$,
- **REKURSIONSSCHRITT:** $\text{fib}(n+1) \;:=$

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

$$\mathbf{fib(n)}$$

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Antwort: $\mathrm{fib}(n)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- **REKURSIONSANFANG**: $\mathrm{fib}(1) \ := \ 1$ und $\mathrm{fib}(2) \ := \ 1$,
- **REKURSIONSSCHRITT:** $\mathrm{fib}(n+1) \ := \ \mathrm{fib}(n) +$

Ein Bauer züchtet Kaninchen. Jedes weibliche Kaninchen bringt im Alter von zwei Monaten ein weibliches Kaninchen zur Welt und danach jeden Monat ein weiteres.

Wie groß ist die Anzahl

fib(n)

der weiblichen Kaninchen, die der Bauer am Ende des n-ten Monats hat, wenn er mit einem neu geborenen weiblichen Kaninchen im ersten Monat startet?

Antwort: $\text{fib}(n)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- **REKURSIONSANFANG**: $\text{fib}(1) \ := \ 1$ und $\text{fib}(2) \ := \ 1$,
- **REKURSIONSSCHRITT:** $\text{fib}(n+1) \ := \ \text{fib}(n) + \text{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Die Funktion fib wird auch **Fibonacci-Folge**[a] genannt, die Zahl $\text{fib}(n)$ heißt auch n-te Fibonacci-Zahl.

[a] Zu Ehren von Leonardo Fibonacci (13. Jh.), einem italienischen Mathematiker

Zur Erinnerung: Es ist

- $\text{fib}(1) \;:=\; 1$ und $\text{fib}(2) \;:=\; 1$ und
- $\text{fib}(n+1) \;:=\; \text{fib}(n) + \text{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Somit gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{fib}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Zur Erinnerung: Es ist

- $\mathrm{fib}(1) := 1$ und $\mathrm{fib}(2) := 1$ und
- $\mathrm{fib}(n+1) := \mathrm{fib}(n) + \mathrm{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Somit gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{fib}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Wie stark wächst die Folge $\mathrm{fib}(n)$?

- Zeige $\mathrm{fib}(n) \leqslant 2^n$ mit Induktionsanfang für $n_0 =$

Zur Erinnerung: Es ist

- $\mathrm{fib}(1) \;:=\; 1$ und $\mathrm{fib}(2) \;:=\; 1$ und
- $\mathrm{fib}(n+1) \;:=\; \mathrm{fib}(n) + \mathrm{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Somit gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{fib}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Wie stark wächst die Folge $\mathrm{fib}(n)$?

- Zeige $\mathrm{fib}(n) \leqslant 2^n$ mit Induktionsanfang für $n_0 = 1$ und $n_0 = 2$ und dem Induktionsschritt von

Zur Erinnerung: Es ist

- $\text{fib}(1) \;:=\; 1$ und $\text{fib}(2) \;:=\; 1$ und
- $\text{fib}(n+1) \;:=\; \text{fib}(n) + \text{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Somit gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{fib}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Wie stark wächst die Folge $\text{fib}(n)$?

- Zeige $\text{fib}(n) \leqslant 2^n$ mit Induktionsanfang für $\underline{n_0 = 1 \text{ und } n_0 = 2}$ und dem Induktionsschritt von $\underline{n-1 \text{ und } n}$ auf $n+1$.

Zur Erinnerung: Es ist

- $\text{fib}(1) := 1$ und $\text{fib}(2) := 1$ und
- $\text{fib}(n+1) := \text{fib}(n) + \text{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Somit gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{fib}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Wie stark wächst die Folge $\text{fib}(n)$?

- Zeige $\text{fib}(n) \leqslant 2^n$ mit Induktionsanfang für $n_0 = 1$ und $n_0 = 2$ und dem Induktionsschritt von $n-1$ und n auf $n+1$.
- Zeige, dass

$$2^{n/2} \leqslant \text{fib}(n)$$

  für $n \geqslant$

Zur Erinnerung: Es ist

- $\text{fib}(1) := 1$ und $\text{fib}(2) := 1$ und
- $\text{fib}(n+1) := \text{fib}(n) + \text{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Somit gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{fib}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Wie stark wächst die Folge $\text{fib}(n)$?

- Zeige $\text{fib}(n) \leqslant 2^n$ mit Induktionsanfang für $n_0 = 1$ und $n_0 = 2$ und dem Induktionsschritt von $n-1$ und n auf $n+1$.
- Zeige, dass
$$2^{n/2} \leqslant \text{fib}(n)$$
für $n \geqslant 6$ gilt. Verwende diesmal den Induktionsanfang für $n_0 =$

Zur Erinnerung: Es ist

- $\text{fib}(1) := 1$ und $\text{fib}(2) := 1$ und
- $\text{fib}(n+1) := \text{fib}(n) + \text{fib}(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Somit gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{fib}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Wie stark wächst die Folge $\text{fib}(n)$?

- Zeige $\text{fib}(n) \leqslant 2^n$ mit Induktionsanfang für $n_0 = 1$ und $n_0 = 2$ und dem Induktionsschritt von $n-1$ und n auf $n+1$.
- Zeige, dass
$$2^{n/2} \leqslant \text{fib}(n)$$
für $n \geqslant 6$ gilt. Verwende diesmal den Induktionsanfang für $n_0 = 6$ und $n_0 = 7$.

Rekursive Programme

Wir berechnen fib(n), die $n$te Fibonacci-Zahl

Algo(n):

1. Falls $n = 1$, dann "return" Algo$(1) := 1$.
2. Falls $n = 2$, dann "return" Algo$(2) := 1$.
3. Falls $n \geqslant 3$, dann "return" Algo$(n) :=$ Algo$(n-1) +$ Algo$(n-2)$.

Wir zählen jede Addition, jeden Vergleich, und jede Ergebnis-Rückgabe als einen Schritt. Wir beschreiben die Anzahl $g(n)$ benötigter Schritte durch

$$g(1) \quad =$$

Wir berechnen fib(n), die $n$te Fibonacci-Zahl

Algo(n):

1. Falls $n = 1$, dann "return" Algo(1) $:= 1$.
2. Falls $n = 2$, dann "return" Algo(2) $:= 1$.
3. Falls $n \geqslant 3$, dann "return" Algo(n) $:=$ Algo($n-1$) $+$ Algo($n-2$).

Wir zählen jede Addition, jeden Vergleich, und jede Ergebnis-Rückgabe als einen Schritt. Wir beschreiben die Anzahl $g(n)$ benötigter Schritte durch

$$g(1) \quad = \quad 2, \quad g(2) =$$

Wir berechnen fib(n), die $n$te Fibonacci-Zahl

Algo(n):

1. Falls $n = 1$, dann "return" $\text{Algo}(1) := 1$.
2. Falls $n = 2$, dann "return" $\text{Algo}(2) := 1$.
3. Falls $n \geqslant 3$, dann "return" $\text{Algo}(n) := \text{Algo}(n-1) + \text{Algo}(n-2)$.

Wir zählen jede Addition, jeden Vergleich, und jede Ergebnis-Rückgabe als einen Schritt. Wir beschreiben die Anzahl $g(n)$ benötigter Schritte durch

$$\begin{aligned} g(1) &= 2, \quad g(2) = 3 \quad \text{und} \\ g(n) &= \end{aligned}$$

Wir berechnen fib(n), die $n$te Fibonacci-Zahl

Algo(n):

1. Falls $n = 1$, dann "return" Algo(1) $:= 1$.
2. Falls $n = 2$, dann "return" Algo(2) $:= 1$.
3. Falls $n \geqslant 3$, dann "return" Algo(n) $:=$ Algo($n-1$) $+$ Algo($n-2$).

Wir zählen jede Addition, jeden Vergleich, und jede Ergebnis-Rückgabe als einen Schritt. Wir beschreiben die Anzahl $g(n)$ benötigter Schritte durch

$$\begin{aligned} g(1) &= 2, \quad g(2) = 3 \quad \text{und} \\ g(n) &= 5 + \end{aligned}$$

Wir berechnen fib(n), die $n$te Fibonacci-Zahl

Algo(n):

1. Falls $n = 1$, dann "return" Algo$(1) := 1$.
2. Falls $n = 2$, dann "return" Algo$(2) := 1$.
3. Falls $n \geqslant 3$, dann "return" Algo$(n) :=$ Algo$(n-1) +$ Algo$(n-2)$.

Wir zählen jede Addition, jeden Vergleich, und jede Ergebnis-Rückgabe als einen Schritt. Wir beschreiben die Anzahl $g(n)$ benötigter Schritte durch

$$\begin{aligned} g(1) &= 2, \quad g(2) = 3 \quad \text{und} \\ g(n) &= 5 + g(n-1) + \end{aligned}$$

Wir berechnen fib(n), die $n$te Fibonacci-Zahl

Algo(n):

1. Falls $n = 1$, dann "return" Algo(1) $:= 1$.
2. Falls $n = 2$, dann "return" Algo(2) $:= 1$.
3. Falls $n \geqslant 3$, dann "return" Algo(n) $:=$ Algo($n-1$) $+$ Algo($n-2$).

Wir zählen jede Addition, jeden Vergleich, und jede Ergebnis-Rückgabe als einen Schritt. Wir beschreiben die Anzahl $g(n)$ benötigter Schritte durch

$$\begin{aligned} g(1) &= 2, \quad g(2) = 3 \quad \text{und} \\ g(n) &= 5 + g(n-1) + g(n-2). \end{aligned}$$

Wir berechnen fib(n), die $n$te Fibonacci-Zahl

Algo(n):

1. Falls $n = 1$, dann "return" Algo(1) := 1.
2. Falls $n = 2$, dann "return" Algo(2) := 1.
3. Falls $n \geqslant 3$, dann "return" Algo(n) := Algo($n-1$) + Algo($n-2$).

Wir zählen jede Addition, jeden Vergleich, und jede Ergebnis-Rückgabe als einen Schritt. Wir beschreiben die Anzahl $g(n)$ benötigter Schritte durch

$$\begin{aligned} g(1) &= 2, \quad g(2) = 3 \quad \text{und} \\ g(n) &= 5 + g(n-1) + g(n-2). \end{aligned}$$

Um Himmels willen, für $n \geqslant 6$ ist

$$g(n) \geqslant \mathrm{fib}(n) \geqslant 2^{n/2},$$

die Laufzeit ist **exponentiell** $\lightning$ **Das geht doch viel, viel schneller!**

Der Euklidsche Algorithmus

```
def euklid(a,b):                              # Es gelte a, b ∈ ℕ mit a ⩾ b.
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euklid(b, a % b)
```

Zeige durch vollständige Induktion nach b, dass *für alle* natürlichen Zahlen a gilt

$$\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b).$$

Der Euklidsche Algorithmus

```
def euklid(a,b):                    # Es gelte a, b ∈ ℕ mit a ⩾ b.
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euklid(b, a % b)
```

Zeige durch vollständige Induktion nach b, dass *für alle* natürlichen Zahlen a gilt

$$\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b).$$

INDUKTIONSANFANG für $b = 0$: $\text{euklid}(a, 0) = a$

Der Euklidsche Algorithmus

```
def euklid(a,b):                              # Es gelte a, b ∈ ℕ mit a ⩾ b.
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euklid(b, a % b)
```

Zeige durch vollständige Induktion nach b, dass *für alle* natürlichen Zahlen a gilt

$$\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b).$$

INDUKTIONSANFANG für $b = 0$: $\text{euklid}(a, 0) = a = \text{ggT}(a, 0)$. ✓

Der Euklidsche Algorithmus

```
def euklid(a,b):                              # Es gelte a, b ∈ ℕ mit a ⩾ b.
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euklid(b, a % b)
```

Zeige durch vollständige Induktion nach b, dass *für alle* natürlichen Zahlen a gilt

$$\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b).$$

INDUKTIONSANFANG für $b = 0$: $\text{euklid}(a, 0) = a = \text{ggT}(a, 0)$. ✓

INDUKTIONSSCHRITT für $b > 0$: Nach Induktionsannahme gilt
$\text{euklid}(a^*, b^*) = \text{ggT}(a^*, b^*)$ *für alle* $a^*, b^* \in \mathbb{N}$ **falls** $b^* < b$.
Zeige $\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b)$.

Der Euklidsche Algorithmus

```
def euklid(a,b):                          # Es gelte a, b ∈ ℕ mit a ⩾ b.
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euklid(b, a % b)
```

Zeige durch vollständige Induktion nach b, dass *für alle* natürlichen Zahlen a gilt

$$\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b).$$

INDUKTIONSANFANG für $b = 0$: $\text{euklid}(a, 0) = a = \text{ggT}(a, 0)$. ✓

INDUKTIONSSCHRITT für $b > 0$: Nach Induktionsannahme gilt
$\text{euklid}(a^*, b^*) = \text{ggT}(a^*, b^*)$ *für alle* $a^*, b^* \in \mathbb{N}$ **falls** $b^* < b$.
Zeige $\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b)$. Es ist

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a\%b)$$

Siehe Tafel

Der Euklidsche Algorithmus

```
def euklid(a,b):                          # Es gelte a, b ∈ ℕ mit a ⩾ b.
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euklid(b, a % b)
```

Zeige durch vollständige Induktion nach b, dass *für alle* natürlichen Zahlen a gilt

$$\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b).$$

INDUKTIONSANFANG für $b = 0$: $\text{euklid}(a, 0) = a = \text{ggT}(a, 0)$. ✓

INDUKTIONSSCHRITT für $b > 0$: Nach Induktionsannahme gilt
$\text{euklid}(a^*, b^*) = \text{ggT}(a^*, b^*)$ *für alle* $a^*, b^* \in \mathbb{N}$ **falls** $b^* < b$.
Zeige $\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b)$. Es ist

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a\%b)$$

Siehe Tafel $\Longrightarrow$ Setze $a^* := b$, $b^* := a\%b$.

Der Euklidsche Algorithmus

```
def euklid(a,b):                      # Es gelte a, b ∈ ℕ mit a ⩾ b.
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euklid(b, a % b)
```

Zeige durch vollständige Induktion nach b, dass *für alle* natürlichen Zahlen a gilt

$$\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b).$$

INDUKTIONSANFANG für $b = 0$: $\text{euklid}(a, 0) = a = \text{ggT}(a, 0)$. ✓

INDUKTIONSSCHRITT für $b > 0$: Nach Induktionsannahme gilt
$\text{euklid}(a^*, b^*) = \text{ggT}(a^*, b^*)$ *für alle* $a^*, b^* \in \mathbb{N}$ **falls** $b^* < b$.
Zeige $\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b)$. Es ist

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a\%b)$$

Siehe Tafel $\Longrightarrow$ Setze $a^* := b$, $b^* := a\%b$.

Da $b^* < b$: $\text{euklid}(a, b) =$

Der Euklidsche Algorithmus

```
def euklid(a,b):                    # Es gelte a, b ∈ ℕ mit a ⩾ b.
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euklid(b, a % b)
```

Zeige durch vollständige Induktion nach b, dass *für alle* natürlichen Zahlen a gilt

$$\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b).$$

INDUKTIONSANFANG für $b = 0$: $\text{euklid}(a, 0) = a = \text{ggT}(a, 0)$. ✓

INDUKTIONSSCHRITT für $b > 0$: Nach Induktionsannahme gilt
$\text{euklid}(a^*, b^*) = \text{ggT}(a^*, b^*)$ *für alle* $a^*, b^* \in \mathbb{N}$ **falls** $b^* < b$.
Zeige $\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b)$. Es ist

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a\%b)$$

Siehe Tafel $\Longrightarrow$ Setze $a^* := b$, $b^* := a\%b$.

Da $b^* < b$: $\text{euklid}(a, b) = \text{euklid}(b, a\%b) \stackrel{\text{IA}}{=}$

Der Euklidsche Algorithmus

```
def euklid(a,b):                              # Es gelte a, b ∈ ℕ mit a ⩾ b.
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euklid(b, a % b)
```

Zeige durch vollständige Induktion nach b, dass *für alle* natürlichen Zahlen a gilt

$$\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b).$$

INDUKTIONSANFANG für $b = 0$: $\text{euklid}(a, 0) = a = \text{ggT}(a, 0)$. ✓

INDUKTIONSSCHRITT für $b > 0$: Nach Induktionsannahme gilt
$\text{euklid}(a^*, b^*) = \text{ggT}(a^*, b^*)$ *für alle* $a^*, b^* \in \mathbb{N}$ **falls** $b^* < b$.
Zeige $\text{euklid}(a, b) = \text{ggT}(a, b)$. Es ist

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a\%b)$$

Siehe Tafel $\Longrightarrow$ Setze $a^* := b, b^* := a\%b$.

Da $b^* < b$: $\text{euklid}(a, b) = \text{euklid}(b, a\%b) \stackrel{\text{IA}}{=} \text{ggT}(b, a\%b) =$

Der Euklidsche Algorithmus

```
def euklid(a,b):                         # Es gelte a, b ∈ ℕ mit a ⩾ b.
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euklid(b, a % b)
```

Zeige durch vollständige Induktion nach b, dass *für alle* natürlichen Zahlen a gilt

$$\mathrm{euklid}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, b).$$

INDUKTIONSANFANG für $b = 0$: $\mathrm{euklid}(a, 0) = a = \mathrm{ggT}(a, 0)$. ✓

INDUKTIONSSCHRITT für $b > 0$: Nach Induktionsannahme gilt
$\mathrm{euklid}(a^*, b^*) = \mathrm{ggT}(a^*, b^*)$ *für alle* $a^*, b^* \in \mathbb{N}$ **falls** $b^* < b$.
Zeige $\mathrm{euklid}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, b)$. Es ist

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, a\%b)$$

Siehe Tafel $\Longrightarrow$ Setze $a^* := b, b^* := a\%b$.

Da $b^* < b$: $\mathrm{euklid}(a, b) = \mathrm{euklid}(b, a\%b) \overset{\mathrm{IA}}{=} \mathrm{ggT}(b, a\%b) = \mathrm{ggT}(a, b)$ ✓

Zusammenfassung

1. Mit Quantoren arbeiten:
   - Zeige eine Existenz-Aussage

     Es gibt ein Objekt mit Eigenschaft E

     z. B. durch die **Konstruktion** eines Objekts mit der geforderten Eigenschaft.
   - Widerlege eine All-Aussage

     Alle Objekte haben die Eigenschaft E

     durch ein **Gegenbeispiel**. Um die All-Aussage zu beweisen, zeige für ein *beliebiges* Objekt x, dass x die Eigenschaft E hat.
2. Beweismethoden:
   - **Direkter** Beweis
     - ⋆ $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$,
   - Beweis durch **Kontraposition**
   - Beweis durch **Widerspruch**
     - ⋆ $\sqrt{2}$ ist irrational, es gibt unendlich viele Primzahlen, die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar groß, es gibt nicht-berechenbare Probleme.
   - Beweis durch **vollständige Induktion**
     - ⋆ die Summe der ersten n Zahlen, die geometrische Reihe, die Fibonacci-Folge, die Parität, Rekursionsgleichungen, die Verifikation rekursiver Programme.
     - ⋆ **Rekursive Definitionen** (und ihre Analyse mit Hilfe der vollständigen Induktion).

Unfug: Teil 1

Sei a eine positive reelle Zahl. Dann gilt $a^n = 1$ für alle natürlichen Zahlen n.

Wir führen eine vollständige Induktion nach n aus.

INDUKTIONSANFANG: $n = 0$. Nach Definition der Potenzierung ist $a^0 = 1$. ✓.

Unfug: Teil 1

Sei a eine positive reelle Zahl. Dann gilt $a^n = 1$ für alle natürlichen Zahlen n.

Wir führen eine vollständige Induktion nach n aus.

INDUKTIONSANFANG: $n = 0$. Nach Definition der Potenzierung ist $a^0 = 1$. ✓.

INDUKTIONSSCHRITT: $n \to n + 1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Induktionsannahme: Es gilt $a^{n-1} = 1$ und $a^n = 1$. Zeige $a^{n+1} = 1$.

Unfug: Teil 1

Sei a eine positive reelle Zahl. Dann gilt $a^n = 1$ für alle natürlichen Zahlen n.

Wir führen eine vollständige Induktion nach n aus.

INDUKTIONSANFANG: $n = 0$. Nach Definition der Potenzierung ist $a^0 = 1$. ✓.

INDUKTIONSSCHRITT: $n \to n + 1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Induktionsannahme: Es gilt $a^{n-1} = 1$ und $a^n = 1$. Zeige $a^{n+1} = 1$.

Beachte $a^{n+1} = \frac{a^{2n}}{a^{n-1}}$

Unfug: Teil 1

Sei a eine positive reelle Zahl. Dann gilt $a^n = 1$ für alle natürlichen Zahlen n.

Wir führen eine vollständige Induktion nach n aus.

INDUKTIONSANFANG: $n = 0$. Nach Definition der Potenzierung ist $a^0 = 1$. ✓.

INDUKTIONSSCHRITT: $n \to n + 1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Induktionsannahme: Es gilt $a^{n-1} = 1$ und $a^n = 1$. Zeige $a^{n+1} = 1$.

Beachte $a^{n+1} = \frac{a^{2n}}{a^{n-1}} = \frac{a^n \cdot a^n}{a^{n-1}}$

Unfug: Teil 1

Sei a eine positive reelle Zahl. Dann gilt $a^n = 1$ für alle natürlichen Zahlen n.

Wir führen eine vollständige Induktion nach n aus.

INDUKTIONSANFANG: $n = 0$. Nach Definition der Potenzierung ist $a^0 = 1$. $\checkmark$.

INDUKTIONSSCHRITT: $n \to n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Induktionsannahme: Es gilt $a^{n-1} = 1$ und $a^n = 1$. Zeige $a^{n+1} = 1$.

Beachte $a^{n+1} = \frac{a^{2n}}{a^{n-1}} = \frac{a^n \cdot a^n}{a^{n-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$ und das war zu zeigen. $\checkmark$

Unfug: Teil 2

Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt $a = b$.

Setze $k = \max\{a, b\}$. Wir führen eine vollständige Induktion nach k aus.

INDUKTIONSANFANG: Es ist $k = \max\{a, b\} = 0$ und $a = 0 = b$ folgt. $\checkmark$.

Unfug: Teil 2

Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt $a = b$.

Setze $k = \max\{a, b\}$. Wir führen eine vollständige Induktion nach k aus.

INDUKTIONSANFANG: Es ist $k = \max\{a, b\} = 0$ und $a = 0 = b$ folgt. ✓.

INDUKTIONSSCHRITT: $k \to k + 1$. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: Wenn $\max\{c, d\} = k$, dann folgt $c = d$.
Es gelte also $\max\{a, b\} := k + 1$: Zeige $a = b$.

Unfug: Teil 2

Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt $a = b$.

Setze $k = \max\{a, b\}$. Wir führen eine vollständige Induktion nach k aus.

INDUKTIONSANFANG: Es ist $k = \max\{a, b\} = 0$ und $a = 0 = b$ folgt. ✓.

INDUKTIONSSCHRITT: $k \to k + 1$. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: Wenn $\max\{c, d\} = k$, dann folgt $c = d$.
Es gelte also $\max\{a, b\} := k + 1$: Zeige $a = b$.

- Da $\max\{a, b\} = k + 1$, folgt $\max\{a - 1, b - 1\} = k$.

Unfug: Teil 2

Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt $a = b$.

Setze $k = \max\{a, b\}$. Wir führen eine vollständige Induktion nach k aus.

INDUKTIONSANFANG: Es ist $k = \max\{a, b\} = 0$ und $a = 0 = b$ folgt. ✓.

INDUKTIONSSCHRITT: $k \to k + 1$. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: Wenn $\max\{c, d\} = k$, dann folgt $c = d$.
Es gelte also $\max\{a, b\} := k + 1$: Zeige $a = b$.

- Da $\max\{a, b\} = k + 1$, folgt $\max\{a - 1, b - 1\} = k$.
- $\overset{\text{Induktionsannahme}}{\Longrightarrow} a - 1 = b - 1$

Unfug: Teil 2

Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt $a = b$.

Setze $k = \max\{a, b\}$. Wir führen eine vollständige Induktion nach k aus.

INDUKTIONSANFANG: Es ist $k = \max\{a, b\} = 0$ und $a = 0 = b$ folgt. ✓.

INDUKTIONSSCHRITT: $k \to k + 1$. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: Wenn $\max\{c, d\} = k$, dann folgt $c = d$.
Es gelte also $\max\{a, b\} := k + 1$: Zeige $a = b$.

- Da $\max\{a, b\} = k + 1$, folgt $\max\{a - 1, b - 1\} = k$.
- $\overset{\text{Induktionsannahme}}{\Longrightarrow} a - 1 = b - 1 \Longrightarrow a = b$ ✓

Unfug: Teil 3 (Induktionsanfang)

F.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ gilt: Ist M eine Menge von Menschen mit $|M| = n$, so haben alle Menschen in M die gleiche Größe.

Unfug: Teil 3 (Induktionsanfang)

F.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ gilt: Ist M eine Menge von Menschen mit $|M| = n$, so haben alle Menschen in M die gleiche Größe.

Wir führen einen „Beweis" durch Induktion nach n:

INDUKTIONSANFANG: $n = 1$

Behauptung:
Ist M eine Menge von Menschen mit $|M| = 1$, so haben alle Menschen in M die gleiche Größe.

Beweis:
Sei M eine Menge von Menschen mit $|M| = 1$. D.h. M besteht aus genau einem Menschen. Daher haben offensichtlich alle Menschen in M die gleiche Größe.

Unfug: Teil 3 (Induktionsschritt)

INDUKTIONSSCHRITT: $n \to n+1$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ beliebig.

Induktionsannahme: Ist M' eine Menge von Menschen mit $|M'| = n$, so haben alle Menschen in M' die gleiche Größe.

Behauptung: Ist M eine Menge von Menschen mit $|M| = n+1$, so haben alle Menschen in M die gleiche Größe.

Unfug: Teil 3 (Induktionsschritt)

INDUKTIONSSCHRITT: $n \to n+1$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ beliebig.

Induktionsannahme: Ist M' eine Menge von Menschen mit $|M'| = n$, so haben alle Menschen in M' die gleiche Größe.

Behauptung: Ist M eine Menge von Menschen mit $|M| = n+1$, so haben alle Menschen in M die gleiche Größe.

Beweis: Sei $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ eine Menge von $n+1$ Menschen mit den Personen $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Wir können die Induktionsannahme auf

$$M' := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \text{und} \quad M'' := \{a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}.$$

anwenden, denn M' und M'' sind Mengen von n Menschen.

Unfug: Teil 3 (Induktionsschritt)

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ beliebig.

Induktionsannahme: Ist M' eine Menge von Menschen mit $|M'| = n$, so haben alle Menschen in M' die gleiche Größe.

Behauptung: Ist M eine Menge von Menschen mit $|M| = n+1$, so haben alle Menschen in M die gleiche Größe.

Beweis: Sei $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ eine Menge von $n+1$ Menschen mit den Personen $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Wir können die Induktionsannahme auf

$$M' \;:=\; \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \text{und} \quad M'' \;:=\; \{a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}.$$

anwenden, denn M' und M'' sind Mengen von n Menschen. Wir erhalten

(1) Alle Menschen in M' haben die gleiche Größe g', und

(2) alle Menschen in M'' haben die gleiche Größe g''.

Unfug: Teil 3 (Induktionsschritt)

INDUKTIONSSCHRITT: $n \to n+1$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ beliebig.

Induktionsannahme: Ist M' eine Menge von Menschen mit $|M'| = n$, so haben alle Menschen in M' die gleiche Größe.

Behauptung: Ist M eine Menge von Menschen mit $|M| = n+1$, so haben alle Menschen in M die gleiche Größe.

Beweis: Sei $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ eine Menge von $n+1$ Menschen mit den Personen $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Wir können die Induktionsannahme auf

$$M' \;:=\; \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \text{und} \quad M'' \;:=\; \{a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}.$$

anwenden, denn M' und M'' sind Mengen von n Menschen. Wir erhalten

(1) Alle Menschen in M' haben die gleiche Größe g', und

(2) alle Menschen in M'' haben die gleiche Größe g''.

Aber Person a_2 gehört sowohl zu M' wie auch zu M'': Also folgt

$$g' = g''. \quad \square$$