Fragestunde

Bitte helfen Sie mir durch Fragen, Anmerkungen und Teilnahme an **Umfragen**.
Halten Sie für Umfragen ein **Browserfenster mit folgender URL offen**:

`tinygu.de/algoVote`

Äquivalenz

Betrachten Sie die folgenden Formeln:

- $\phi_1 = x \vee y \vee (\neg x \wedge \neg z)$
- $\phi_2 = \neg x \wedge \neg y \wedge (x \vee z)$

Wie stehen die Aussagen der Formeln in Beziehung?

- (A) $\phi_1 \models \phi_2$
- (B) $\phi_2 \models \phi_1$
- (C) $\phi_1 \equiv \phi_2$
- (D) weder noch

Auflösung: (D) weder noch

Äquivalenz

Betrachten Sie die folgenden Formeln:

- $\phi_1 = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (\neg y \rightarrow \neg x)$
- $\phi_2 = \mathbf{1}$

Wie stehen die Aussagen der Formeln in Beziehung?

- (A) $\phi_1 \models \phi_2$
- (B) $\phi_2 \models \phi_1$
- (C) $\phi_1 \equiv \phi_2$
- (D) weder noch

Auflösung: (C) äquivalent

Äquivalenz

Betrachten Sie die folgenden Formeln:

- $\phi_1 = \neg x \vee \neg z$
- $\phi_2 = (x \to y) \wedge (y \to \neg z)$

Wie stehen die Aussagen der Formeln in Beziehung?

- (A) $\phi_1 \models \phi_2$
- (B) $\phi_2 \models \phi_1$
- (C) $\phi_1 \equiv \phi_2$
- (D) weder noch

Auflösung: (B) $\phi_2 \models \phi_1$

DNF

Welche der folgenden Formeln ist eine DNF für

$$\phi := (x \leftrightarrow y) \vee (x \leftrightarrow z)$$

- (A) $(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)$
- (B) $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg z)$
- (C) $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg z)$
- (D) $x \vee (y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z)$

Auflösung: (B)

DNF

Welche der folgenden Formeln ist eine DNF für

$$\phi := ((x \to y) \oplus (x \lor \neg y \lor z)) \to (\neg z \to (x \land y))$$

- (A) $(x \land y) \lor (x \land z) \lor (y \land \neg z)$
- (B) $(x \land y) \lor (\neg x \land \neg y) \lor z$
- (C) $(x \lor \neg y \lor z) \land (\neg x \lor y \lor z)$
- (D) $(x \land y \land z) \lor (x \land y \land \neg z) \lor (x \land \neg y \land z) \lor (\neg x \land y \land z)$
  $\lor (\neg x \land \neg y \land z) \lor (\neg x \land \neg y \land \neg z)$

Auflösung: (B), (D)

DNF

Welche der folgenden Formeln ist eine DNF für

$$\phi := ((x \rightarrow z) \vee (x \rightarrow \neg y)) \leftrightarrow ((z \rightarrow x) \vee (z \rightarrow \neg y))$$

- (A) $(x \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee \neg y$
- (B) $\neg x \vee \neg z \vee \neg y$
- (C) $(x \wedge z) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg z \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg y)$
- (D) $(x \wedge x) \vee (\neg x \wedge \neg x)$

Auflösung: (A)

KNF

Welche der folgenden Formeln ist eine KNF für

$$\phi := (x \leftrightarrow y) \vee (x \leftrightarrow z)$$

- (A) $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg z)$
- (B) $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg z)$
- (C) $(x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z)$
- (D) $(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z)$
- (E) $(\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$

Auflösung: (E)

Resolution

Wir wenden einen Resolutionsschritt auf eine Formel ϕ in KNF an. Seien $\alpha \cup \{X\}$ und $\beta \cup \{\neg X\}$ zwei Disjunktionsterme aus ϕ. Für den neuen abgeleiteten Disjunktionsterm $\alpha \cup \beta$ gilt nun

$$(\alpha \cup \beta) \equiv \mathbf{1}.$$

Was sagt das über ϕ aus?

- (A) ϕ ist allgemeingültig.
- (B) ϕ hat mindestens eine erfüllende und eine falsifizierende Belegung.
- (C) ϕ ist unerfüllbar.
- (D) weder noch.

Auflösung: (D) weder noch.

Resolution

Betrachte folgende KNF-Formel:

$$(A \vee \neg B \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg E) \wedge D \wedge E$$

Kann der leere Disjunktionsterm ε mit Resolution abgeleitet werden?

- Ja.
- Nein.

Auflösung: Nein, die Formel ist erfüllbar. Betrachte eine Belegung $\mathcal{B}$ mit $[\![B]\!]^{\mathcal{B}} = 0$ und $[\![C]\!]^{\mathcal{B}} = [\![D]\!]^{\mathcal{B}} = [\![E]\!]^{\mathcal{B}} = 1$.

Resolution – Ein Beispiel

Wir wenden Resolution auf die KNF-Formel an:

$$(A \vee \neg B \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg E) \wedge D \wedge E$$

Disjunktionsterme:

$$\{A, \neg B, \neg D, \neg E\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, \neg C, \neg E\}, \{D\}, \{E\}$$

Ableitungen:

- $\{\,\{A, \neg B, \neg D, \neg E\}, \{E\}\,\} \vdash \{A, \neg B, \neg D\}$
- $\{\{\neg B, \neg C, \neg E\}, \{E\}\} \vdash \{\neg B, \neg C\}$
- $\{\{A, \neg B, \neg D\}, \{D\}\} \vdash \{A, \neg B\}$
- $\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, C\}\} \vdash \{\neg B, C\}$
- $\{\{\neg B, \neg C\}, \{\neg B, C\}\} \vdash \{\neg B\}$
- ...

Es gibt noch weitere Ableitungen. Die ergeben aber nur Mengen, für die wir Teilmengen bereits hergeleitet haben. Wir werden $\{\neg B\}$ als Teilmenge niemals "los". ϵ kann sich also nicht ergeben (klar, die Formel ist ja erfüllbar).

Anwendung DPLL

$$(A \vee \neg B \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg E) \wedge D \wedge E$$

DPLL findet für diese Formel eine erfüllende Belegung, sogar ohne rekursive Aufrufe:

1. Unit Resolution: Setze $E = 1$. Verbleibende Formel:
   $(A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge D$
2. Unit Resolution: Setze $D = 1$. Verbleibende Formel:
   $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C)$
3. Pure Literal Rule: Setze $B = 0$. Verbleibende Formel: $(\neg A \vee C)$
4. Pure Literal Rule: Setze $C = 1$. Verbleibende Formel: $\emptyset$,

$\rightarrow$ Erfüllende Belegung gefunden, Ende.