Fragestunde

Bitte helfen Sie mir durch Fragen, Anmerkungen und Teilnahme an **Umfragen**.
Halten Sie für Umfragen ein **Browserfenster mit folgender URL offen**:

`tinygu.de/algoVote`

Die Negation der Aussage

Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.

ist

- (A) Alle ungeraden Zahlen sind durch 2 teilbar.
- (B) Alle geraden Zahlen sind nicht durch 2 teilbar.
- (C) Es gibt mindestens eine gerade Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist.
- (D) Es gibt mindestens eine ungerade Zahl, die durch 2 teilbar ist.

Auflösung: (C) Es gibt mindestens eine gerade Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist.

Die Negation der Aussage

> Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann hat der Ozean einen Wasserfall.

ist

- (A) Wenn die Erde keine Scheibe ist, dann hat der Ozean einen Wasserfall.
- (B) Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann hat der Ozean keinen Wasserfall.
- (C) Wenn die Erde keine Scheibe ist, dann hat der Ozean keinen Wasserfall.
- (D) Die Erde ist eine Scheibe, und der Ozean hat keinen Wasserfall.
- (E) Die Erde ist keine Scheibe, und der Ozean hat einen Wasserfall.

Auflösung: (D) Die Erde ist eine Scheibe, und der Ozean hat keinen Wasserfall.

Betrachte folgendes rekursives Verfahren $\texttt{Funk}(i, n)$:

1. **if** $((i \notin \mathbb{N}_{>0})$ oder $(n \notin \mathbb{N}_{>0})$ oder $(i > n))$ **then return** $\emptyset$
2. **if** $(n \mod i) == 0$ **then** $X := \{i\}$ **else** $X := \emptyset$
3. $Y := \texttt{Funk}(i - 1, n)$
4. **return** $(X \cup Y)$

Was ist die Ausgabe von $\texttt{Funk}(i, n)$ wenn $i, n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $i \leq n$?
Auflösung: $\{j \in \mathbb{N}_{>0} : j \leq i$ und j Teiler von $n\}$

Rekursion

Betrachte folgendes rekursives Verfahren $\texttt{Funk}(i, n)$:

1. **if** $((i \notin \mathbb{N}_{>0})$ oder $(n \notin \mathbb{N}_{>0})$ oder $(i > n))$ **then return** $\emptyset$
2. **if** $(n \mod i) == 0$ **then** $X := \{i\}$ **else** $X := \emptyset$
3. $Y := \texttt{Funk}(i - 1, n)$
4. **return** $(X \cup Y)$

Wieviele rekursive Unteraufrufe werden für $\texttt{Funk}(100, 100)$ noch gemacht?

- (A) ca. $\sqrt{100} = 10$
- (B) ca. 100
- (C) ca. $100^2 = 10000$
- (D) ca. $2^{100} \approx 1\,267\,650\,600\,228\,229\,400\,000\,000\,000\,000$
- (E) mehr als 2^{100}

Auflösung: (B) 100 Aufrufe:

$\texttt{Funk}(99, 100)$, $\texttt{Funk}(98, 100)$, $\dots$, $\texttt{Funk}(1, 100)$, $\texttt{Funk}(0, 100)$

Betrachte folgende Anpassung von $\texttt{Funk}(i, n)$:

1. **if** $((i \notin \mathbb{N}_{>0})$ oder $(n \notin \mathbb{N}_{>0})$ oder $(i > n))$ **then return** $\emptyset$
2. **if** $(n \mod i) == 0$ **then** $X := \{i\}$ **else** $X := \emptyset$
3. $Y := \texttt{Funk}(i-1, n)$
4. $Z := \texttt{Funk}(i+1, n)$
5. **return** $(X \cup Y \cup Z)$

Wieviele rekursive Aufrufe werden im Verlauf von $\texttt{Funk}(100, 100)$ gemacht?

- (A) ca. $\sqrt{100} = 10$
- (B) ca. 100
- (C) ca. $100^2 = 10000$
- (D) ca. $2^{100} \approx 1\,267\,650\,600\,228\,229\,400\,000\,000\,000\,000$
- (E) mehr als 2^{100}

Auflösung: (E) unendlich viele Aufrufe: (100,100) $\rightarrow$ (99,100) und (101,100), (99,100) $\rightarrow$ (98,100) und (100,100)...

Schubfachprinzip

Wir verteilen n Puppen in $k < n$ Kinderstuben, mit $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.
Dann gibt es mindestens eine Stube, die mindestens zwei Puppen hat.

1. Beweis:

- Aussage gilt für $n = 2$ und $k = 1$. Annahme: Gilt für $n - 1$ und alle $k < n - 1$.
- Betrachte eine beliebige Verteilung von n Puppen in $k < n$ Stuben.
- Stube 1 hat ...
- ... zwei Puppen $\rightarrow \surd$
- ... eine Puppe $\rightarrow$ Rest: $k - 1 < n - 1$ Stuben und $n - 1$ Puppen $\rightarrow$ Aussage gilt per Annahme im Rest.
- ... keine Puppe $\rightarrow$ Rest: $k - 1 < n - 1$ Stuben und n Puppen $\rightarrow$ nimm n-te Puppe weg, Aussage gilt für $k - 1 < n - 1$ Stuben und $n - 1$ Puppen. n-te Puppe kann die Anzahl nur erhöhen.

Beweisformat:

- (A) direkt
- (B) indirekt
- (C) Induktion

Auflösung: (C) Induktion

2. Beweis:
   - Betrachte eine beliebige Verteilung von n Puppen in $k < n$ Stuben.
   - Annahme: Alle Stuben haben maximal eine Puppe.
   - Dann ergibt die Summe über k Stuben maximal k Puppen.
   - Wir verteilen so also höchstens $k < n$ Puppen.

Beweisformat:

- (A) direkt
- (B) indirekt
- (C) Induktion

Auflösung: (B) indirekt

3. Beweis:

- Betrachte eine beliebige Verteilung von n Puppen in $k < n$ Stuben.
- Die durchschnittliche Anzahl Puppen pro Stube ist $n/k > 1$.
- Wenn k Zahlen den Durchschnitt $\bar{x}$ haben, dann gibt es eine Zahl, die mindestens so groß wie $\bar{x}$ ist.
- Also gibt es eine Stube, die mindestens $n/k > 1$ Puppen hat.
- Puppen werden nicht zerteilt, diese Stube muss $\lceil n/k \rceil \geq 2$ Puppen haben.

Beweisformat:

- (A) direkt
- (B) indirekt
- (C) Induktion

Auflösung: (A) direkt – aber evtl. etwas “gemogelt”: Der dritte Schritt ist eine Aussage über den Durchschnitt, die dem Schubfachprinzip quasi entspricht.
Wie sehr muss man im Beweis ins Detail gehen, was kann man voraussetzen?

Hände schütteln

Auf einem Empfang schütteln sich die Gäste die Hände. Jedes Paar von Gästen, die sich kennen, schüttelt sich genau einmal die Hände. Aufgrund von Corona-Maßnahmen müssen danach beide Gäste ihre Hände desinfizieren. Der Veranstalter möchte abschätzen, wieviel Dosen Desinfektionsmittel bereitstehen müssen.

Sei G die Menge der Gäste und P die Menge von zweielementigen Teilmengen (Paaren) von G, die sich kennen.

Der Veranstalter braucht

- (A) höchstens $|G| \cdot (|G| - 1)$ Dosen
- (B) mindestens $|G|$ Dosen
- (C) höchstens $|G| + |P|$ Dosen
- (D) genau $2 \cdot |P|$ Dosen

Auflösung: (A), (D)