Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Georg Schnitger

15. Februar 2018

Diskrete Modellierung (WS 17/18)
Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

⇓ BITTE GENAU BEFOLGEN ⇓

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind in dieser Klausur keine Hilfsmittel erlaubt. Das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel stellt eine Täuschung dar und führt zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur. Schalten Sie insbesondere Ihre Handys und Smartwatches vor Beginn der Klausur aus.
- Legen Sie Ihre Goethe-Card deutlich sichtbar an Ihren Platz, damit wir während der Klausur Ihre Identität überprüfen können.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur alle von 2 bis 18 durchnummerierten Seiten enthält.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Notfalls können Sie auch die beigefügten Zusatzblätter am Ende der Klausur benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich. Wenn Sie Lösungen auf Zusatzblättern notieren, vermerken Sie dies bitte deutlich bei den jeweiligen Aufgabenstellungen.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung dies explizit verlangt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer.
- Schreiben Sie ausschließlich mit einem dokumentenechten blauen oder schwarzen Stift. Verwenden Sie keinen Bleistift, kein Tipp-Ex, keinen radierbaren Kugelschreiber oder löschbaren Füller.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können Sie maximal 100 Punkte erreichen. Ihre durch die Übungsaufgaben im WS 17/18 erworbenen Bonuspunkte werden zu der in der Klausur erreichten Punktzahl addiert. Erreichen Sie insgesamt $z \geq 50$ Punkte, so ist die Prüfung bestanden. Die Noten verteilen sich wie folgt:

Note	z	Note	z	Note	z	Note
1:			$z \geq 95$	$1,0$	$95 > z \geq 90$	$1,3$
2:	$90 > z \geq 85$	$1,7$	$85 > z \geq 80$	$2,0$	$80 > z \geq 75$	$2,3$
3:	$75 > z \geq 70$	$2,7$	$70 > z \geq 65$	$3,0$	$65 > z \geq 60$	$3,3$
4:	$60 > z \geq 55$	$3,7$	$55 > z \geq 50$	$4,0$		

Aufgabe	**1a**	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**	**3a**	**3b**	**3c**	**4a**	**4b**	**4c**	**4d**	**5**
maximale Punkte	8	6	8	6	8	7	10	6	5	9	5	8	7	7
erreichte Punkte														
summiert														

Viel Erfolg!

	Klausur	**Bonus**	**Gesamt**
maximal	100	15	115
erreicht			

Note:

Aufgabe 1: Aussagenlogik

(a) Es sollen Rezepturen aus den Stoffen A, B und C industriell hergestellt werden. Allerdings müssen die folgenden Einschränkungen eingehalten werden. **[8 Pkte]**

Einschränkung 1: Aus Kostengründen dürfen höchstens zwei der drei Stoffe A, B oder C verwendet werden, aber mindestens einer der Stoffe muss verwendet werden.

Einschränkung 2: Stoff A muss mit den beiden anderen Stoffe kombiniert werden: A darf also nur dann eingesetzt werden, wenn auch B und C eingesetzt werden.

Einschränkung 3: B verträgt sich weder mit A noch mit C.

Formalisieren Sie die drei Einschränkungen durch je eine aussagenlogische Formel.

$\varphi_{\text{Einschränkung 1}} :=$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Einschränkung 2}} :=$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Einschränkung 3}} :=$ (2 Pkte)

Geben Sie alle Rezepturen an, die den drei Einschränkungen genügen, und begründen Sie Ihre Antwort. Eine direkte Argumentation mithilfe der drei Einschränkungen reicht aus.

(2 Pkte)

Mögliche Rezepturen:

Begründung:

(b) **[6 Pkte]**

(i) Leiten Sie den leeren Disjunktionsterm ϵ mittels **Resolution** aus der Menge (3 Pkte)

$$K := \Big\{ \{\neg A, B\}, \{A, \neg B\}, \{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, \neg C\} \Big\}$$

von Disjunktionstermen her.

Geben Sie **alle** Schritte Ihres Resolutionsbeweises an. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Disjunktionsterme (ob zu K gehörig oder zwischenzeitlich abgeleitet) benutzt werden.

$\{\neg A, B\}$ $\{A, \neg B\}$ $\{A, B\}$ $\{\neg A, C\}$ $\{\neg B, \neg C\}$

(ii) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie zwei Punkte, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe ist aber mindestens 0. (3 Pkte)

Sei K eine beliebige Menge von Disjunktionstermen und seien φ und ψ beliebige aussagenlogische Formeln. Dann gilt immer:

Eine Menge K von Disjunktionstermen ist genau dann allgemeingültig, wenn der leere Disjunktionsterm ϵ durch Resolution aus K abgeleitet werden kann.	☐ wahr	☐ falsch
$\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \mathbf{1}$	☐ wahr	☐ falsch
$\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $(\varphi \wedge \neg\psi) \equiv \mathbf{0}$	☐ wahr	☐ falsch

(c) (i) Geben Sie eine zu **[7 Pkte]**

$$\psi := \Big(A \vee (B \oplus C)\Big) \wedge \Big(A \vee \neg B\Big)$$

äquivalente Formel ψ_{KNF} in **konjunktiver** Normalform (KNF) an. (3 Pkte)
(Wenn Sie Ihren Lösungsweg angeben, können Sie Teilpunkte auch bei falscher Lösung erhalten.)

$\psi_{\text{KNF}} =$

Sie können die untenstehende Wahrheitstafel verwenden.

A	B	C	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

(ii) Gegeben sei ein $n \times n$-Schachbrett $\mathcal{S} := \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ mit n Zeilen und n Spalten. Auf jedem Feld des Brettes darf ein König platziert werden, wobei die folgenden Regeln eingehalten werden müssen: (4 Pkte)

Regel 1: In Zeile 5 steht mindestens ein König.

Regel 2: In Zeile 3 dürfen Könige nicht direkt nebeneinander stehen.

Verwenden Sie im Folgenden für alle $(i, j) \in \mathcal{S}$ die Variable $K_{i,j}$ mit der Bedeutung

„auf dem Feld (i, j) in Zeile i und Spalte j steht ein König“.

Formalisieren Sie die beiden Regeln durch je eine Formel.

$\varphi_{\text{Regel 1}} =$

$\varphi_{\text{Regel 2}} =$

Aufgabe 2: Graphen

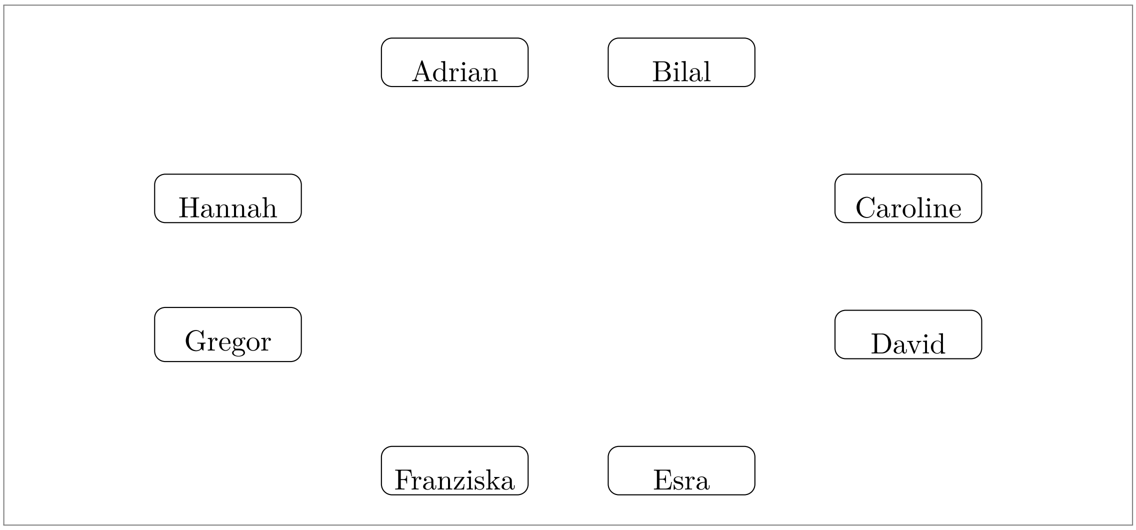
(a) Acht Kinder (Adrian, Bilal, Caroline, David, Esra, Franziska, Gregor, Hannah) sollen in *möglichst wenige Teams* aufgeteilt werden. Damit alle Kinder neue Freunde gewinnen können, wird entschieden: **[6 Pkte]**

„Wenn zwei Kinder miteinander befreundet sind, dürfen sie *nicht* im selben Team sein.“

Es bestehen die folgenden *Freundschaften*:

- Adrian ist nur mit Bilal, Caroline, Franziska und Hannah befreundet.
- Bilal ist außerdem mit Gregor, Esra und David befreundet.
- Caroline ist ebenfalls mit Gregor, Esra und David befreundet.
- David und Gregor sind beste Freunde.
- Esra ist außerdem mit Gregor und Franziska befreundet.

(i) Modellieren Sie alle **Freundschaften** durch einen ungerichteten Graphen G. (2 Pkte)



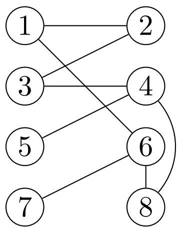
(ii) Welches graphentheoretische Problem in G muss gelöst werden, damit möglichst wenige Teams gebildet werden und nur Kinder im selben Team sind, die nicht miteinander befreundet sind? (2 Pkte)

(iii) Wie viele Teams müssen gebildet werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

Höchstens ______ Teams sind ausreichend, weil …

Weniger Teams sind nicht möglich, weil …

(b) Der Graph $G = (V, E)$ wird durch die folgende Abbildung beschrieben: **[8 Pkte]**



(i) Begründen Sie, warum es in G kein perfektes Matching gibt. (2 Pkte)

(ii) Geben Sie ein möglichst großes Matching M in G an. (1 Pkt)

$M = \{$

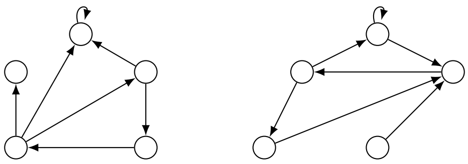
(iii) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

G ist bipartit.

☐ wahr ☐ falsch

Beweis:

(iv) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe ist aber mindestens 0. (3 Pkte)



G_1 G_2

- G_1 ist isomorph zu G_2. ☐ wahr ☐ falsch
- Der 4-dimensionale Würfel W_4 hat 32 Kanten. ☐ wahr ☐ falsch
- Jeder Baum ist planar. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Für einen Baum B sei $\mathsf{Blätter}(B)$ die Menge aller Blätter von B. Beweisen Sie die folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der Knoten von B. **[7 Pkte]**

Wenn $B = (V, E)$ ein **voller** Binärbaum ist, dann gilt

$$\left|\mathsf{Blätter}(B)\right| = \left|V \setminus \mathsf{Blätter}(B)\right| + 1,$$

d. h. die Anzahl der Blätter ist um genau 1 größer als die Anzahl der restlichen Knoten.

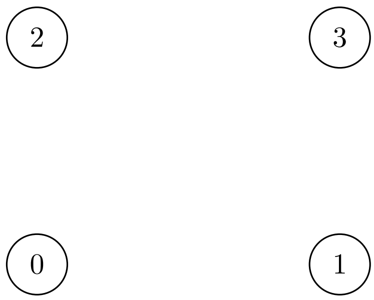
Erinnerung: In vollen Binärbaumen hat jeder Knoten genau zwei Kinder oder er ist ein Blatt.

Beweis:

Aufgabe 3: Markov-Ketten

(a) Bob sammelt Sticker von berühmten Apollo-11-Astronauten für sein Sammelalbum. Es gibt insgesamt **drei** verschiedene Sticker[1]. Bob kauft jeden Tag ein Päckchen, in welchem sich **zwei zufällig ausgewählte unterschiedliche** Sticker befinden. Wenn Bob einen Sticker erhält, den er noch nicht besitzt, klebt er ihn in sein Album. **[10 Pkte]**

(i) Modellieren Sie das Geschehen durch eine Markov-Kette $\mathcal{M} = (G, P)$. Verwenden Sie die Zustände $0, 1, 2, 3$, wobei Zustand i angibt, dass Bob genau i (verschiedene) Sticker in sein Album geklebt hat. (6 Pkte)
Geben Sie den Graphen G in grafischer Darstellung an und beschriften Sie die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten.



(ii) Angenommen, Bob startet mit einem Sticker im Album. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er nach genau **zwei Tagen** alle drei Sticker gesammelt? (2 Pkte)

(iii) Ist die Markov-Kette $\mathcal{M}$ ergodisch? (1 Pkt)

Ergodisch? ☐ ja ☐ nein

(iv) Besitzt die Markov-Kette $\mathcal{M}$ eine Grenzverteilung? Falls ja, geben Sie eine an. (1 Pkt)

☐ ja ☐ nein

$\mathcal{G}(\mathcal{M}) = ($

[1] nämlich Neil Armstrong, Buzz Aldrin und Michael Collins

(b) **[6 Pkte]**

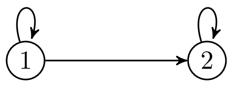
(i) Geben Sie einen Graphen G an, der irreduzibel, aber **nicht** aperiodisch ist. (2 Pkte)

(ii) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe ist aber mindestens 0. (4 Pkte)

Sei $M = (G, P)$ eine **ergodische** Markov-Kette und $P^\infty = \lim_{k\to\infty} P^k$ ihre Grenzmatrix. Dann gilt immer …

G besitzt keinen Knoten mit Ein-Grad 0.	☐ wahr	☐ falsch
G besitzt mindestens eine Eigenschleife.	☐ wahr	☐ falsch
Alle Zeilen in P^∞ sind identisch.	☐ wahr	☐ falsch
Für alle i, j gilt $P^\infty_{i,j} > 0$.	☐ wahr	☐ falsch

(c) Wir betrachten den Page-Rank aus der Perspektive des Peer-Reviews. Es sei der Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$ gegeben und der Webgraph sehe wie folgt aus: **[5 Pkte]**



(i) Stellen Sie ein Gleichungssystem für den Page-Rank-Vektor $\mathrm{PR} = (\mathrm{PR}_1, \mathrm{PR}_2)$ auf. (2 Pkte)

(ii) Bestimmen Sie einen Vektor mit Page-Rank-Eigenschaft, indem Sie das Gleichungssystem aus Aufgabenteil (i) lösen. (3 Pkte)

Aufgabe 4: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

(a) **[9 Pkte]**

(i) Gegeben sei der reguläre Ausdruck (3 Pkte)

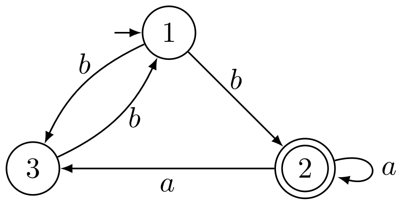
$$R := (a|ba)^* \, b(b|\varepsilon).$$

Welche der folgenden Worte liegen in der Sprache $L(R)$, welche nicht? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe ist aber mindestens 0.

Wort	$\ldots \in L(R)$?	
ε	☐ ja	☐ nein
ba	☐ ja	☐ nein
$baab$	☐ ja	☐ nein

(ii) Geben Sie einen NFA N mit $L(N) = L(R)$ an. (3 Pkte)

(iii) Gegeben sei der NFA N' über $\Sigma := \{a, b\}$ durch folgendes Zustandsdiagramm:



Geben Sie mithilfe der Potenzmengenkonstruktion das Zustandsdiagramm eines DFAs D an, der dieselbe Sprache wie der NFA N' akzeptiert. Berücksichtigen Sie in D nur solche Zustände, die vom Startzustand $\{1\}$ aus erreichbar sind. (3 Pkte)

(Sie können folgende Vorlage verwenden.)

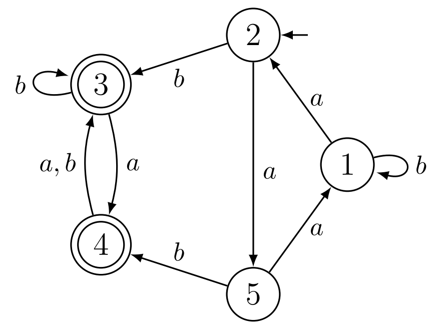
	a	b
$\{1\}$		
$\{2\}$		
$\{3\}$		

(b) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Die Sprache L sei wie folgt definiert: **[5 Pkte]**

$$L := \{w \in \Sigma^* : \ w \text{ enthält weder das Teilwort } aa \text{ noch } bb\}$$

Konstruieren Sie einen DFA D mit genau **vier** Zuständen für L.

(c) (i) Der folgende DFA A über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ sei gegeben: **[8 Pkte]**



Bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A' für A. Geben Sie A' als Zustandsdiagramm an. (6 Pkte)

(Wenn Sie Zwischenschritte angeben, können Sie auch bei falscher Lösung Teilpunkte erhalten.)

(Sie können folgende Vorlage verwenden.)

2				
3				
4				
5				
	1	2	3	4

Äquivalenzklassenautomat A':

(ii) Genau **eine** der folgenden Antworten ist richtig. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. (2 Pkte)

Sei D ein **DFA** mit Zustandsmenge Q und es gelte $L = L(D)$.

- ☐ Dann gilt immer $\text{Index}(L) \geq |Q|$.
- ☐ Dann gilt immer $\text{Index}(L) \leq |Q|$.
- ☐ Dann gilt immer $\text{Index}(L) = |Q|$.
- ☐ keine der obigen Antworten

(d) Die Klammersprache K über dem Alphabet $\Sigma := \{\,\langle, \rangle\,\}$ ist wie folgt definiert: **[7 Pkte]**

(B) $\varepsilon \in L$.

(R1) Wenn $x \in K$, dann ist auch $\langle x \rangle \in K$.

(R2) Wenn $x, y \in K$, dann ist auch $xy \in K$.

Zeigen Sie: $\text{Index}(K) = \infty$.

Beweis:

Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatiken

[7 Pkte]

(i) Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $V = \{S, T\}$ und (3 Pkte)

$$P = \Big\{\ S \to aSc \mid T,\quad T \to Tb \mid \varepsilon\ \Big\}$$

Beschreiben Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$ umgangssprachlich oder mathematisch.

(ii) Gegeben sei das Alphabet (4 Pkte)

$$\Sigma := \Big\{X,\ Y,\ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ (,\ )\Big\}.$$

Wir geben eine rekursive Definition für die Menge AL′ aller aussagenlogischer Formeln über den Variablen X und Y sowie den Junktoren $\neg, \wedge, \vee$ an.

Rekursionsanfang:

$\mathbf{0}, \mathbf{1}, X, Y$ gehören zu AL′.

Rekursionsschritt: Wenn φ und ψ zu AL′ gehören, dann gehören auch

$$\neg\varphi\ ,\ (\varphi \wedge \psi)\ \text{ und }\ (\varphi \vee \psi)$$

zu AL′.

Geben Sie eine KFG G an, so dass gilt $L(G) = \mathrm{AL}'$.

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V = \Big\{S$

$P = \Big\{$