Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Georg Schnitger

5. März 2020

Diskrete Modellierung (WS 19/20)
Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

⇓ BITTE GENAU LESEN UND BEFOLGEN ⇓

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind in dieser Klausur keine Hilfsmittel erlaubt. Das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel stellt eine Täuschung dar und führt zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur. Schalten Sie insbesondere Handys, Smartwatches, etc. vor Beginn der Klausur aus.
- Legen Sie Ihre Goethe-Card deutlich sichtbar an Ihren Platz, damit wir während der Klausur Ihre Identität überprüfen können.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur alle von 2 bis 18 durchnummerierten Seiten enthält.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Notfalls können Sie auch die Zusatzblätter am Ende der Klausur benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich.
  Wenn Sie Lösungen auf Zusatzblättern notieren, vermerken Sie dies deutlich bei den jeweiligen Aufgabenstellungen.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung diese verlangt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer.
- Schreiben Sie ausschließlich mit einem dokumentenechten blauen oder schwarzen Stift. Verwenden Sie insbesondere keinen Bleistift, kein Tipp-Ex, keinen radierbaren Kugelschreiber oder löschbaren Füller.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können Sie maximal 100 Punkte erreichen. Erreichen Sie mindestens 50 Punkte, so ist die Prüfung bestanden.
  Bei Bestehen der Prüfung werden Ihre durch die Übungen im WS 19/20 erworbenen Bonuspunkte zu den in der Klausur erreichten Punkten addiert. Bei Nichtbestehen werden keine Bonuspunkte angerechnet.
  Die Note hängt von der Gesamtpunktzahl z (Klausurpunkte + Bonuspunkte aus Übungen) ab und ergibt sich wie folgt:

z	Note	z	Note	z	Note	z	Note
$z \geq 95$	$1,0$	$95 > z \geq 90$	$1,3$	$90 > z \geq 85$	$1,7$	$85 > z \geq 80$	$2,0$
$80 > z \geq 75$	$2,3$	$75 > z \geq 70$	$2,7$	$70 > z \geq 65$	$3,0$	$65 > z \geq 60$	$3,3$
$60 > z \geq 55$	$3,7$	$55 > z \geq 50$	$4,0$				

Aufgabe	**1a**	**1b**	**1c**	**1d**	**2a**	**2b**	**2c**	**3a**	**3b**	**3c**	**4a**	**4b**	**4c**	**4d**	**4e**	**5**
max. Punkte	6	5	6	5	7	8	6	11	6	5	4	5	5	7	8	6
erreichte Punkte																
summiert																

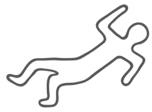
Viel Erfolg!

	Klausur	**Bonus**	**Gesamt**
maximal	100	12	112
erreicht			

Note:

Aufgabe 1: Aussagenlogik

(a) Ein Verbrechen ist geschehen. Es gibt drei Tatverdächtige: Alfred, Berta und Charlotte. Folgende Indizien wurden ermittelt: **[6 Pkte]**



Indiz 1: Alfred ist ein Einzelgänger. Falls er am Verbrechen beteiligt ist, dann sind weder Berta noch Charlotte beteiligt.

Indiz 2: Berta ist nicht besonders mutig. Sie ist nur dann am Verbrechen beteiligt, wenn auch Alfred beteiligt ist.

Indiz 3: Es gibt höchstens zwei Täter.

Formalisieren Sie die drei Indizien durch je eine aussagenlogische Formel. Verwenden Sie die Variablen A, B und C mit der Bedeutung „**A**lfred, **B**erta bzw. **C**harlotte ist am Verbrechen beteiligt.“

$\varphi_{\text{Indiz 1}} :=$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Indiz 2}} :=$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Indiz 3}} :=$ (2 Pkte)

(b) **[5 Pkte]**

(i) Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln. Geben Sie die Definition der **semantischen Folgerung** $\varphi \models \psi$ an. (2 Pkte)

Es gilt $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn ...

(ii) Gilt die folgende semantische Äquivalenz? (3 Pkte)

$$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \equiv ((A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C))$$

Falls ja, begründen Sie dies; falls nein, geben Sie eine Belegung an, welche die semantische Äquivalenz widerlegt.

(c) **[6 Pkte]**

(i) Leiten Sie den leeren Disjunktionsterm ϵ mittels **Resolution** aus der Menge (3 Pkte)

$$K := \Big\{ \{A, B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, C\}, \{\neg C, \neg A\}, \{\neg A, C\} \Big\}$$

von Disjunktionstermen her.

Zeigen Sie alle Schritte Ihres Resolutionsbeweises. Eine grafische Lösung genügt.

$\{A,\, B\}$ $\{\neg B,\, \neg C\}$ $\{A,\, C\}$ $\{\neg C,\, \neg A\}$ $\{\neg A,\, C\}$

(ii) Geben Sie eine zu (3 Pkte)

$$\psi := (A \oplus B) \wedge \neg C$$

äquivalente Formel ψ' in **konjunktiver** Normalform (KNF) an.
(Wenn Sie Ihren Lösungsweg angeben, können Sie auch bei falscher Lösung Teilpunkte erhalten.)

$\psi' :=$

(d) Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ und Kantenmenge E. Die Knoten sind **rot gefärbt** oder **nicht rot gefärbt**. **[5 Pkte]**

Formalisieren Sie die folgenden zwei Regeln durch je eine aussagenlogische Formel φ_1 bzw. φ_2. Verwenden Sie dazu für alle Knoten $i \in V$ die aussagenlogische Variable R_i mit der Bedeutung „Knoten i ist rot gefärbt“.

(i) **Regel 1**: Mindestens ein Knoten von G ist nicht rot gefärbt. (2 Pkte)

$\varphi_1 :=$

(ii) **Regel 2**: Jeder Knoten von G besitzt einen rot gefärbten Nachbarn oder ist selbst rot gefärbt. (3 Pkte)

Notation: Für jeden Knoten $i \in V$ ist $N(i) := \{j \in V : \{i, j\} \in E\}$ die Menge der Nachbarn von i.

$\varphi_2 :=$

Aufgabe 2: Graphen

(a) Im Spiel GibVierTripel liegt zu Beginn ein Stein auf dem Tisch. **[7 Pkte]**

Alice und Bob sind abwechselnd am Zug. Alice beginnt. Der ziehende Spieler muss entweder

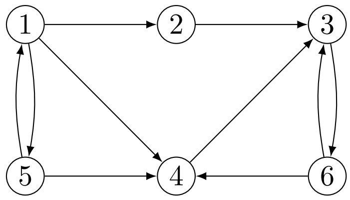
- die Anzahl der Steine auf dem Tisch verdreifachen oder
- vier weitere Steine auf den Tisch legen.

Das Spiel endet, wenn am Ende eines Zuges mehr als 10 Steine auf dem Tisch liegen. Bob gewinnt, falls die Anzahl der Steine am Ende des Spiels durch drei teilbar ist. Andernfalls gewinnt Alice.

(i) Modellieren Sie das Spiel durch einen gerichteten, azyklischen Graphen (DAG). Ein Knoten repräsentiert dabei einen Spielzustand und eine Kante einen Zug von Alice bzw. Bob. (4 Pkte)

(ii) Hat Alice eine Gewinnstrategie? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Pkte)

(b) Der Graph G_1 sei durch die folgende Abbildung gegeben: **[8 Pkte]**



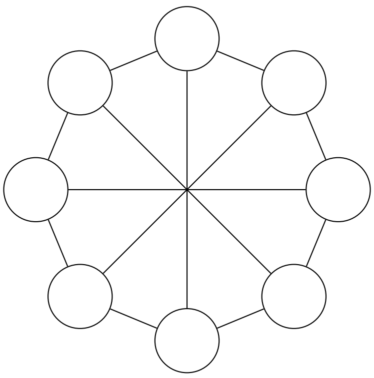
(i) Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten von G_1 an. (2 Pkte)

(ii) Fügen Sie eine Kante (i, j) zum obigen Graphen G_1 hinzu, sodass der so entstehende Graph einen Hamiltonkreis besitzt, und geben Sie den Hamiltonkreis an. (2 Pkte)

$i =$ ____ und $j =$ ____

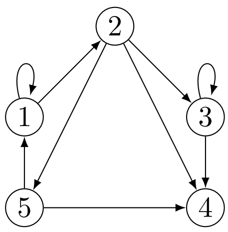
Der Hamiltonkreis ist ...

(iii) Bestimmen Sie für den folgenden Graphen G_2 eine Färbung mit möglichst wenigen Farben. Tragen Sie die Farben direkt in die Knoten ein und geben Sie die chromatische Zahl $\chi(G_2)$ an. (2 Pkte)

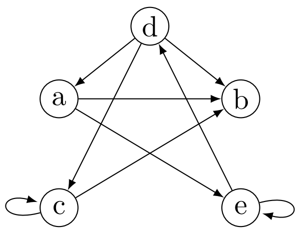


$\chi(G_2) =$ ____

(iv) Die Graphen H und I seien wie folgt in grafischer Darstellung gegeben.



H



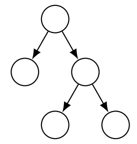
I

Geben Sie einen Isomorphismus $\pi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$ von H nach I an. (2 Pkte)

v	1	2	3	4	5
$\pi(v)$					

(c) Zeigen Sie die folgende Aussage. **[6 Pkte]**

In jedem **vollen Binärbaum** $B = (V, E)$ ist die Anzahl der Knoten ungerade, d. h. es gilt $|V| = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}$.



ein voller Binärbaum mit fünf Knoten

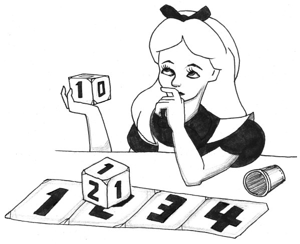
Zur Erinnerung: Ein Binärbaum heißt voll, falls jeder Knoten, der kein Blatt ist, den Aus-Grad 2 besitzt.

Hinweis: Sie können die Aussage durch vollständige Induktion nach der Tiefe t von B zeigen. Auch ein direkter Beweis ist möglich.

Aufgabe 3: Markov-Ketten

[11 Pkte]

(a) Alice spielt ein Würfelspiel mit folgenden Regeln. Das Spielbrett besitzt vier Felder 1, 2, 3, 4, die von links nach rechts angeordnet sind. Ziel des Spiels ist es, das Feld 4 zu erreichen.
Solange sie Feld 4 noch nicht erreicht hat, wirft sie in jeder Runde zwei sechsseitige Würfel:



- der eine Würfel ist mit den sechs Zahlen $1, 1, 1, 1, 2, 2$ beschriftet.
- der andere Würfel ist mit den sechs Zahlen $0, 0, 0, 1, 1, 1$ beschriftet.

Alice addiert die Ergebnisse beider Würfe und zieht entsprechend viele Felder weit nach rechts. Falls sie mehr Felder ziehen müsste als möglich ist, muss sie statt des Zuges auf Feld 1 ziehen.
(Beispiel: Alice steht auf Feld 1 *und würfelt mit einem Würfel eine* 2 *und mit dem anderen eine* 0*: sie muss zwei Felder weiter auf Feld* 3 *ziehen. Anschließend würfelt sie erneut eine* 2 *und eine* 0*: sie kann diesmal nicht zwei Felder weiterziehen und kehrt stattdessen auf Feld* 1 *zurück.)*
Wenn Alice das Feld 4 erreicht, gewinnt sie und verbleibt dort für immer.

(i) Modellieren Sie Alice' Spiel als Irrfahrt auf den Feldern 1, 2, 3, 4 und verwenden Sie dazu eine Markov-Kette (G, P). Geben Sie den Graphen G in grafischer Darstellung an und beschriften Sie dessen Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten. (6 Pkte)

1 2 3 4

(ii) Alice beginnt das Spiel auf Feld 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie bereits nach zwei oder weniger Runden gewonnen hat? (2 Pkte)

(iii) Ist die Markov-Kette (G, P) ergodisch? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

(iv) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_{win}, dass Alice das Spiel irgendwann gewinnt. (Eine Rechnung ist nicht erforderlich.) (1 Pkt)

$p_{win} =$ ____

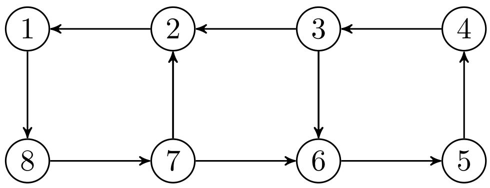
(b) **[6 Pkte]**

(i) Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$. Vervollständigen Sie die Definition eines **aperiodischen** Graphen. (2 Pkte)

Ein Zustand $v \in V$ hat Periode p, wenn p die größte natürliche Zahl ist, sodass die Längen aller Wege von v nach v durch p teilbar sind.

Der Graph G heißt **aperiodisch**, falls ...

(ii) Ist der folgende Graph aperiodisch? Ist er irreduzibel? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.



aperiodisch: (2 Pkte)

irreduzibel: (2 Pkte)

(c) Gegeben sei eine Markov-Kette (G, P) mit den Zuständen $V = \{1, \ldots, n\}$, deren Übergangsmatrix P **symmetrisch** ist, d. h. es gilt $P_{i,j} = P_{j,i}$ für alle $i, j \in V$. **[5 Pkte]**
Zeigen Sie: Die Gleichverteilung

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) = \left(\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}\right)$$

ist eine stationäre Verteilung von (G, P).

Aufgabe 4: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

(a) Gegeben sei der reguläre Ausdruck **[4 Pkte]**

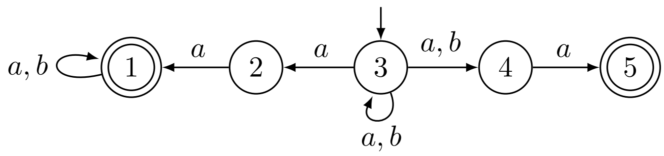
$$R := (a|b)^* aba (a|b)^* .$$

(i) Geben Sie eine kurze umgangssprachliche Beschreibung der Sprache $L(R)$ an. (2 Pkte)

(ii) Sei S ein regulärer Ausdruck für die Sprache L, d. h. es gelte $L(S) = L$. (2 Pkte)
Geben Sie einen regulären Ausdruck S' für die Sprache $L' := L \cup (L \cdot L)$ an.

$S' :=$

(b) Der NFA N sei durch die folgende Abbildung gegeben: **[5 Pkte]**



(i) Geben Sie ein Wort $w_1 \in L(N)$ der Länge 2 an. (1 Pkt)

$w_1 :=$

(ii) Geben Sie ein Wort $w_2 \notin L(N)$ der Länge 2 an. (1 Pkt)

$w_2 :=$

(iii) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache $L(N)$ beschreibt. (3 Pkte)

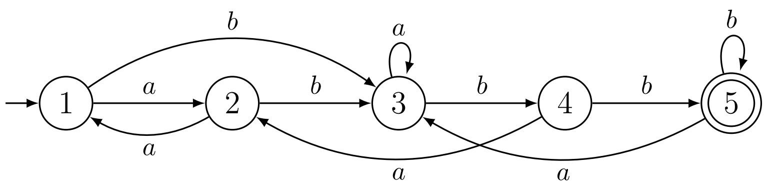
$R :=$

(c) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Konstruieren Sie einen DFA $D = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ für die Sprache **[5 Pkte]**

$$L = \Big\{ w \in \Sigma^* : w \text{ endet auf } aaba \Big\}$$

mit **genau fünf** Zuständen. Eine grafische Darstellung genügt.

(d) (i) Der folgende DFA A über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ sei gegeben: **[7 Pkte]**



Bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A' für A. Geben Sie A' in grafischer Darstellung an und bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen der Relationen $\equiv_A^0$, $\equiv_A^1$ und $\equiv_A^2$. (4 Pkte)

Zur Erinnerung: Für alle Zustände p und q gilt $p \not\equiv_A^i q$ genau dann, wenn p und q durch einen Zeugen der Länge höchstens i getrennt werden können.

(Sie können folgende Vorlage verwenden.) Äquivalenzklassenautomat A':

2				
3				
4				
5				
	1	2	3	4

Äquivalenzklassen von ... (3 Pkte)

$\equiv_A^0$:

$\equiv_A^1$:

$\equiv_A^2$:

(e) **[8 Pkte]**

(i) Vervollständigen Sie die Definition eines **Zeugen** bzgl. der Nerode-Relation. (2 Pkte)

Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und seien $u, v \in \Sigma^*$.

Ein Wort $z \in \Sigma^*$ ist genau dann ein **Zeuge** für die Inäquivalenz $u \not\equiv_L v$, wenn ...

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$. Für ein Wort $w = w_1 \ldots w_{2k+1}$ mit ungerader Länge $2k+1$ bezeichnen wir den Buchstaben w_{k+1} als den *mittleren Buchstaben* von w. (6 Pkte)
(Beispiel: der mittlere Buchstabe von $01\underline{1}01$ *ist* 1*.)*

Zeigen Sie, dass der Index der folgenden Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ unendlich ist.

$$L := \{w \in \{0,1\}^* : |w| \text{ ist ungerade und der mittlere Buchstabe von } w \text{ ist } 1.\}$$

Beweis:

Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatiken

[6 Pkte]

(i) Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass (3 Pkte)

$$L(G) = \left\{ a^n b^{2k+1} c^n \;:\; k, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V = \Big\{$

$P = \Big\{$

(ii) Die Sprache **REG** der *ε-freien regulären Ausdrücke* mit den Buchstaben a und b ist die Menge der Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{\emptyset, a, b, |, \cdot, ^*, (,)\}$, die rekursiv wie folgt definiert ist: (3 Pkte)

Basisregeln:
- Das Symbol $\emptyset$ ist in **REG**.
- Die Symbole a und b sind in **REG**.

Rekursive Regeln:
- Ist R in **REG**, so ist auch R^* in **REG**.
- Sind R und R' in **REG**, so ist auch $(R \cdot R')$ in **REG**.
- Sind R und R' in **REG**, so ist auch $(R \,|\, R')$ in **REG**.

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = \textbf{REG}$ ist.

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V = \Big\{$

$P = \Big\{$