Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Georg Schnitger

20.06.2020

Diskrete Modellierung (SoSe 20)
Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________ Studiengang: ____________________

⇓ BITTE GENAU LESEN UND BEFOLGEN ⇓

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind in dieser Klausur keine Hilfsmittel erlaubt. Das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel stellt eine Täuschung dar und führt zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur. Schalten Sie insbesondere Handys, Smartwatches, etc. vor Beginn der Klausur aus.
- Legen Sie Ihre Goethe-Card sowie die „Bestätigung von Studierenden zur Teilnahme an der Prüfung“ deutlich sichtbar an Ihren Platz.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur alle von 2 bis 15 durchnummerierten Seiten enthält.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Notfalls können Sie auch die Zusatzblätter am Ende der Klausur benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich.
  Wenn Sie Lösungen auf Zusatzblättern notieren, vermerken Sie dies deutlich bei den jeweiligen Aufgabenstellungen.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung diese verlangt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer.
- Schreiben Sie ausschließlich mit einem dokumentenechten blauen oder schwarzen Stift. Verwenden Sie insbesondere keinen Bleistift, kein Tipp-Ex, keinen radierbaren Kugelschreiber oder löschbaren Füller.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können Sie maximal 100 Punkte erreichen. Erreichen Sie mindestens 50 Punkte, so ist die Prüfung bestanden.
  Bei Bestehen der Prüfung werden Ihre durch die Übungen im WS 19/20 erworbenen Bonuspunkte zu den in der Klausur erreichten Punkten addiert. Bei Nichtbestehen werden keine Bonuspunkte angerechnet.
  Die Note hängt von der Gesamtpunktzahl z (Klausurpunkte + Bonuspunkte aus Übungen) ab und ergibt sich wie folgt:

z	Note	z	Note	z	Note	z	Note
$z \geq 95$	$1,0$	$95 > z \geq 90$	$1,3$	$90 > z \geq 85$	$1,7$	$85 > z \geq 80$	$2,0$
$80 > z \geq 75$	$2,3$	$75 > z \geq 70$	$2,7$	$70 > z \geq 65$	$3,0$	$65 > z \geq 60$	$3,3$
$60 > z \geq 55$	$3,7$	$55 > z \geq 50$	$4,0$				

Aufgabe	**1a**	**1b**	**1c**	**1d**	**2a**	**2b**	**2c**	**3a**	**3b**	**3c**	**4a**	**4b**	**4c**	**4d**	**5**
max. Punkte	6	6	5	6	6	7	7	10	6	6	7	5	9	8	6
erreichte Punkte															
summiert															

Viel Erfolg!

	Klausur	**Bonus**	**Gesamt**
maximal	100	12	112
erreicht			

Note:

Aufgabe 1: Aussagenlogik

(a) Ein Supermarkt hat Regeln für den Verkauf der drei Produkte D (wie Desinfektionsmittel), N (wie Nudeln) und T (wie Toilettenpapier) eingeführt: **[6 Pkte]**

Regel 1: Mindestens eines der Produkte N bzw. T muss verkauft werden, aber keinesfalls beide zusammen.

Regel 2: Entweder D und T werden zusammen verkauft oder beide werden nicht verkauft.

Regel 3: T darf nur dann verkauft werden, wenn weder D noch N verkauft werden.

Formalisieren Sie die drei Regeln durch je eine aussagenlogische Formel.

$\varphi_{\text{Regel 1}} := N \oplus T$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Regel 2}} := D \leftrightarrow T$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Regel 3}} := T \rightarrow \neg(D \vee N)$ (2 Pkte)

(b) **[6 Pkte]**

(i) Sei φ eine aussagenlogische Formel. Definieren Sie den Begriff der **Allgemeingültigkeit**. (2 Pkte)

Die Formel φ ist genau dann **allgemeingültig**, wenn ...
... für jede zu φ passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt: $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$.

(ii) Geben Sie eine erfüllende und eine falsifizierende Belegung der Formel (2 Pkte)

$$\varphi := A \oplus ((D \vee \neg C) \rightarrow A)$$

an.

erfüllende Belegung: $\mathcal{B}(A) = 0$, $\mathcal{B}(C) = 1$, $\mathcal{B}(D) = 0$.

falsifizierende Belegung: $\mathcal{B}'(A) = 1$, $\mathcal{B}'(C) = 1$, $\mathcal{B}'(D) = 1$.

(iii) Geben Sie die Menge **aller** erfüllenden Belegungen der Formel (2 Pkte)

$$\psi := \bigwedge_{i=1}^{77} (V_i \leftrightarrow \neg V_{i+1})$$

mit Definitionsbereich $\mathrm{Var}(\psi)$ an.

$\left\{\mathcal{B}_1 : V_1 \mapsto 0, V_2 \mapsto 1, V_3 \mapsto 0, \ldots, V_{76} \mapsto 1, V_{77} \mapsto 0\right\} \cup$
$\left\{\mathcal{B}_2 : V_1 \mapsto 1, V_2 \mapsto 0, V_3 \mapsto 1, \ldots V_{76}, \mapsto 0, V_{77} \mapsto 1\right\}$

(c) Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$ und Kantenmenge E. Jeder Knoten ist entweder **blau gefärbt** oder **nicht blau gefärbt**. **[5 Pkte]**

Verwenden Sie die aussagenlogische Variablen B_v mit der Bedeutung „Knoten v ist blau gefärbt“. Formalisieren Sie die folgenden zwei Regeln durch je eine aussagenlogische Formel φ_1 bzw. φ_2.

(i) **Regel 1**: Es gibt zwei blau gefärbte Knoten, die durch eine Kante verbunden sind. (2 Pkte)

$$\varphi_1 := \bigwedge_{(i,j)\in E} (B_i \wedge B_j)$$

(ii) **Regel 2**: Jeder blau gefärbte Knoten besitzt einen blau gefärbten Vorgänger. (3 Pkte)

Notation: Für jeden Knoten $i \in V$ ist $Vor(i) := \{j \in V : (j, i) \in E\}$ die Menge der Vorgänger von i.

$$\varphi_2 := \bigwedge_{i\in V} \Big(B_i \rightarrow \bigvee_{j\in \mathrm{Vor}(i)} B_j\Big)$$

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist die Formel φ_n wie folgt definiert: **[6 Pkte]**

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= V_1\,, \\ \varphi_n &:= (\varphi_{n-1} \oplus V_n) \quad \text{f.a. } n \geq 2\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$:
Eine Belegung $\mathcal{B} : \textsc{Avar} \to \{0,1\}$ erfüllt φ_n genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}(V_i) \text{ ungerade ist,}$$

d. h. wenn $(\mathcal{B}(V_1), \ldots, \mathcal{B}(V_n))$ eine ungerade Anzahl von Einsen enthält.

Sei $\mathcal{B} : \textsc{Avar} \to \{0,1\}$ eine Belegung.

Induktionsanfang $n = 1$.
Es gilt $\varphi_1 = V_1$ und

$$[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{B}} = 1 \Leftrightarrow \mathcal{B}(V_1) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{1} \mathcal{B}(V_i) \text{ ist ungerade.}$$

Induktionsvoraussetzung: $[\![\varphi_n]\!]^{\mathcal{B}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}(V_i)$ ist ungerade.

Induktionsschritt $n \to n+1$.
Es gilt $\varphi_{n+1} = (\varphi_n \oplus V_{n+1})$ und somit:

$$\begin{aligned} [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1 &\Leftrightarrow \text{ entweder } [\![\varphi_n]\!]^{\mathcal{B}} = 1 \text{ oder } \mathcal{B}(V_{n+1}) = 1 \\ &\overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} \text{ entweder } \sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}(V_i) \text{ ist ungerade } \text{ oder } \mathcal{B}(V_{n+1}) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{B}(V_i) \text{ ist ungerade} \end{aligned}$$

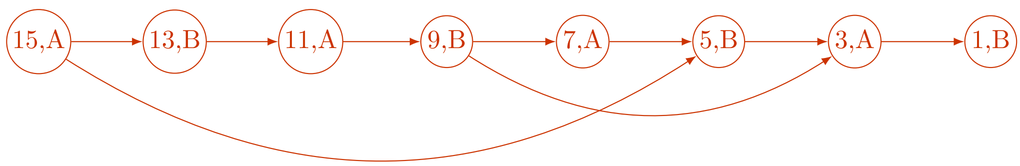
Aufgabe 2: Graphen

(a) Im Spiel NimZweiDrittel liegen zu Beginn 15 Steine auf dem Tisch. Alice und Bob sind abwechselnd am Zug. Alice beginnt. In jedem Zug muss der ziehende Spieler entweder **[6 Pkte]**

- zwei Steine vom Tisch nehmen
- oder die Anzahl der Steine auf dem Tisch dritteln, falls sie durch drei teilbar ist.

Das Spiel endet, wenn nach einem Zug höchstens zwei Steine auf dem Tisch liegen. Wer den letzten Zug macht, gewinnt.

(i) Modellieren Sie das Spiel durch einen gerichteten, azyklischen Graphen (DAG). Ein Knoten repräsentiert dabei einen Spielzustand und eine Kante einen Zug von Alice bzw. Bob. Vermerken Sie in jedem Spielzustand, welcher Spieler am Zug ist. (4 Pkte)

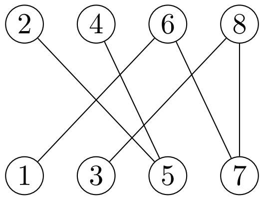


(ii) Hat Bob eine Gewinnstrategie? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

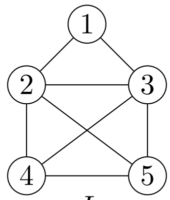
Nein.

Egal, wie die beiden spielen, das Spiel endet immer in Zustand (1,B), sodass Bob verliert.

(b) Die Graphen H und I seien wie folgt in grafischer Darstellung gegeben. **[7 Pkte]**



H



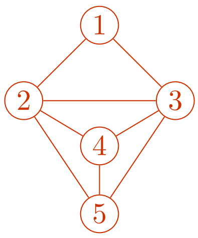
I

(i) Geben Sie ein größtmögliches Matching M in H an. (2 Pkte)

$M = \big\{\{1,6\},\{3,8\},\{2,5\}\big\}$

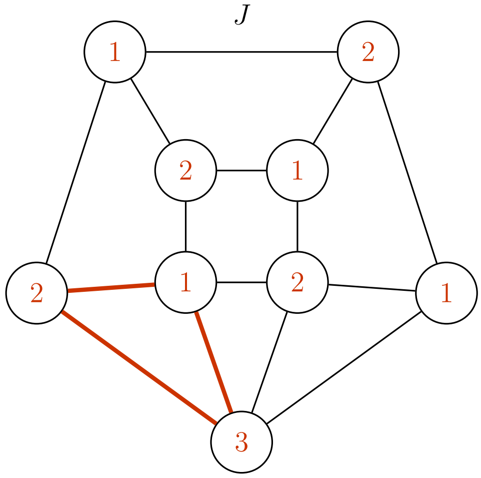
(ii) Ist I planar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

Ja, denn I besitzt die folgende planare Einbettung:



(iii) Geben Sie für den folgenden Graphen J eine Färbung der Knoten mit möglichst wenigen Farben an und bestimmen Sie seine chromatische Zahl $\chi(J)$. (3 Pkte)

J



$\chi(J) = 3$

Zeigen Sie, dass J nicht mit weniger Farben gefärbt werden kann.

J besitzt ein Dreick (oben markiert), deshalb sind mindestens drei Farben nötig.

(c) **[7 Pkte]**

(i) Sei H ein ungerichteter Graph mit einer geraden Anzahl von Knoten. (3 Pkte)
Zeigen Sie: Wenn H einen Hamiltonkreis besitzt, dann gibt es in H ein perfektes Matching.

Sei $C = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ ein Hamiltonkreis in H, wobei n gerade ist.

Dann ist $M := \Big\{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\Big\}$ ein perfektes Matching in H.
(Denn:
- Da C alle Knoten von H abläuft, werden alle Knoten durch M abgedeckt.
- Zwischen je zwei Knoten v_i, v_{i+1} in C gibt es eine Kante.)

(ii) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichter Graph, $v \in V$ ein Knoten mit $\text{Grad}_G(v) = 1$ und u der einzige Nachbar von v. (4 Pkte)
Zeigen Sie: Es gibt ein **größtmögliches Matching** M in G, das die Kante $\{u, v\}$ enthält.

Sei M^* ein größtmögliches Matching. Falls es eine zu u inzidente Kante $e = \{u, w\}$ in M^* gibt, setze

$$M := (M^* \setminus \{e\}) \cup \{\{u, v\}\}.$$

andernfalls setze

$$M := M^* \cup \{\{u, v\}\}.$$

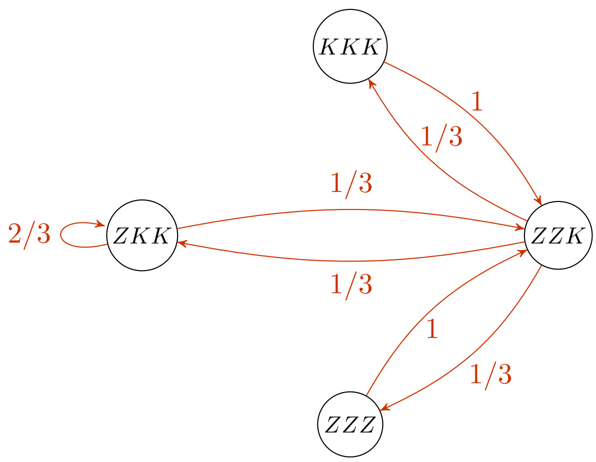
In beiden Fällen gilt:
- M ist ein Matching, denn jeder Knoten besitzt nur höchstens eine inzidente Kante.
- M ist größtmöglich, denn $|M| \geq |M^*|$.
- M enthält die Kante $\{u, v\}$.

Aufgabe 3: Markov-Ketten

(a) Auf dem Tisch liegen drei Münzen, die auf einer Seite mit Kopf und auf der anderen Seite mit Zahl beschriftet sind. Chris führt folgendes Verfahren durch: In jedem Schritt wählt sie zufällig eine der drei Münzen mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit aus. **[10 Pkte]**

- Falls die gewählte Münze Kopf zeigt, dreht sie die beiden anderen Münzen um.
- Falls die gewählte Münze Zahl zeigt, dreht sie eine der anderen beiden Münzen um, wobei sie zufällig mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit wählt, welche der beiden.

(i) Modellieren Sie das Verfahren als Markov-Kette (G, P). Geben Sie den Graphen G in graphischer Darstellung an und beschriften Sie die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten. Ein Zustand gibt an, wie viele Münzen die Beschriftung Kopf bzw. Zahl zeigen, z. B. bedeutet ZKK, dass eine Münze Zahl zeigt und zwei Münzen Kopf zeigen. (6 Pkte)



(ii) Angenommen, anfangs zeigen zwei Münzen Kopf und eine Münze Zahl (ZKK). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass **nach genau drei Schritten** alle Münzen Zahl zeigen (ZZZ)? (2 Pkte)

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

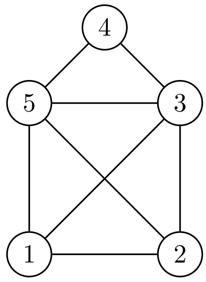
(iii) Ist die Markov-Kette (G, P) ergodisch? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

Ja, denn der Graph ist irreduzibel und aperiodisch.

(irreduzibel: Von Zustand ZZK gelangt man überall hin, und zurück.

aperiodisch: Zustand ZKK besitzt eine Eigenschleife und hat deshalb Periode 1. Wegen der Irreduzibilität hat auch jeder andere Zustand Periode 1.)

(b) Ein Roboter führe eine einfache Irrfahrt auf dem folgenden ungerichteten Graphen aus: In jedem Schritt wechselt der Roboter zu einem zufällig gewählten Nachbarknoten. **[6 Pkte]**



(i) Ist die so beschriebene Irrfahrt ergodisch? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

Ja, denn der obige Graph ist nicht bipartit.

(ii) Geben Sie eine stationäre Verteilung $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_5)$ für die oben beschriebene Irrfahrt an. (2 Pkte)

$\pi = \frac{1}{16}(3, 3, 4, 2, 4)$

(iii) Geben Sie einen **Webgraphen** $\mathcal{W}$ mit 3 Knoten an, sodass für den Page-Rank (2 Pkte)

$$\mathrm{PR} = (\mathrm{PR}_1, \mathrm{PR}_2, \mathrm{PR}_3)$$

bezüglich des Dämpfungsfaktors $d = \frac{1}{2}$ gilt:

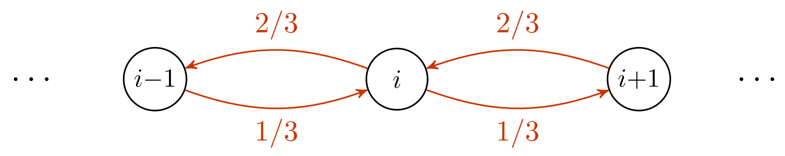
$$\mathrm{PR}_1 < \mathrm{PR}_2 < \mathrm{PR}_3.$$

(c) Gegeben ist eine Markov-Kette (G, P) mit den Zuständen $V = \{1, \ldots, n\}$ und der Übergangsmatrix P, wobei gilt **[6 Pkte]**

$$P_{i,i+1} = 1/3 \text{ und } P_{i+1,i} = 2/3 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

sowie $P_{1,1} = 2/3$ und $P_{n,n} = 1/3$. Alle anderen Einträge der Matrix P sind 0.

(i) Skizzieren Sie einen Ausschnitt der Kette (für $3 \leq i \leq n-2$) in graphischer Darstellung. (2 Pkte)



(ii) Zeigen Sie: Die Verteilung $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ mit (4 Pkte)

$$\pi_i := \frac{(1/2)^i}{\mathcal{C}} \qquad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

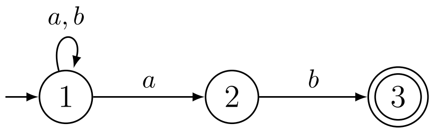
ist eine stationäre Verteilung von (G, P), wobei $\mathcal{C}$ eine Konstante ist.
Es genügt, die Stationarität für alle π_i mit $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ nachzuweisen, die Randfälle π_1 und π_n können Sie auslassen.

Zu zeigen: $(\pi P)_i = \pi_i$ für alle $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

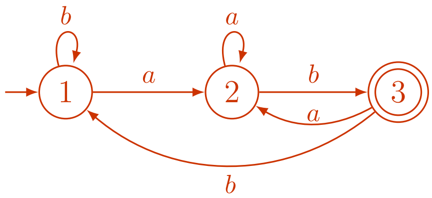
$$\begin{aligned}
(\pi P)_i &= \frac{1}{3}\pi_{i-1} + \frac{2}{3}\pi_{i+1} \\
&= \frac{1}{3}\frac{(1/2)^{i-1}}{\mathcal{C}} + \frac{2}{3}\frac{(1/2)^{i+1}}{\mathcal{C}} \\
&= \frac{2}{3}\frac{(1/2)^{i}}{\mathcal{C}} + \frac{1}{3}\frac{(1/2)^{i}}{\mathcal{C}} \\
&= \frac{(1/2)^{i}}{\mathcal{C}} \\
&= \pi_i
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

(a) Der NFA N über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sei durch die folgende Abbildung gegeben: **[7 Pkte]**



(i) Geben Sie einen DFA D mit $L(D) = L(N)$ an. (3 Pkte)
(*Falls Sie die Potenzmengenkonstruktion verwenden, berücksichtigen Sie nur Zustände, die vom Startzustand aus erreichbar sind.*)



(ii) Sei $N' := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein NFA. Vervollständigen Sie die folgende Definition mithilfe der erweiterten Übergangsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$: (2 Pkte)

Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:
$w \in L(N')$ genau dann, wenn ... $\hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$

(iii) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache (2 Pkte)

$$L = \{w \in \{a, b\}^+ : \text{ der erste und der letzte Buchstabe von } w \text{ sind verschieden}\}$$

beschreibt.

$a(a|b)^*b \mid b(a|b)^*a$

(b) Sei $\Sigma := \{0,1\}$. Wir identifizieren jedes Wort $w = w_1 w_2 \cdots w_{|w|} \in \Sigma^*$ mit der natürlichen Zahl **[5 Pkte]**

$$z(w) := \begin{cases} 0 & \text{falls } w = \varepsilon\,, \\ \sum_{i=1}^{|w|} w_i \cdot 2^{|w|-i} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit anderen Worten: Das Wort w ist die Binärdarstellung der Zahl $z(w)$, wobei das höchstwertige Bit ganz links steht.
Beispielsweise ist $z(101) = 5$, $z(01101) = 13$ *und* $z(100101) = 37$.
Geben Sie einen DFA D mit **genau fünf** Zuständen für die folgende Sprache an:

$$L := \{w \in \Sigma^* \; : \; z(w) \text{ ist durch 5 teilbar}\}$$

Sie können eine grafische Darstellung verwenden oder Startzustand, Übergangsfunktion und akzeptierende Zustände explizit angeben.

(siehe Übungsaufgabe 12.2 b im WiSe 19/20):
$D = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit
$Q = \{0,1,2,3,4\}$, $q_0 = 0$, $F = \{0\}$ und

q	$\delta(q,0)$	$\delta(q,1)$
0	0	1
1	2	3
2	4	0
3	1	2
4	3	4

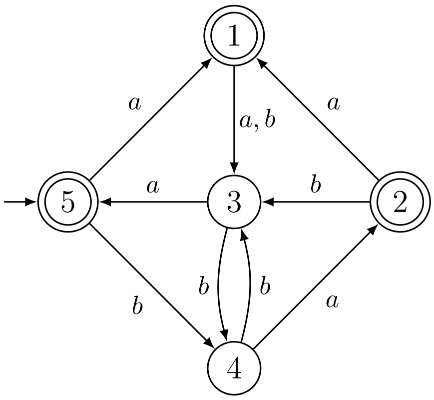
(c) **[9 Pkte]**

(i) Sei $D = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA. Vervollständigen Sie die Definition eines **Zeugen** bzgl. der Verschmelzungsrelation. (2 Pkte)

Seien $p, q \in Q$. Ein Wort $w \in \Sigma^*$ ist ein **Zeuge** für die Inäquivalenz $p \not\equiv_D q$, wenn ...

entweder $\hat{\delta}(p, w) \in F$ **oder** $\hat{\delta}(q, w) \in F$.

Der folgende DFA A über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ sei gegeben:

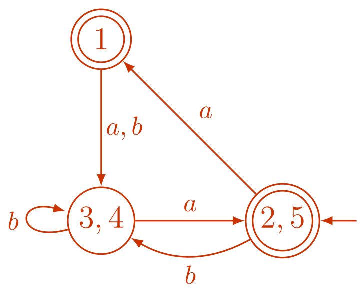


(ii) Bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A' für A in grafischer Darstellung. (4 Pkte)

(Sie können folgende Vorlage verwenden.)

2	M_1			
3	M_0	M_0		
4	M_0	M_0		
5	M_1		M_0	M_0
	1	2	3	4

Äquivalenzklassenautomat A':



(iii) Geben Sie alle Äquivalenzklassen der Relationen $\equiv_A^0$, $\equiv_A^1$ und $\equiv_A^2$ an. (3 Pkte)

$\equiv_A^0$: $\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}$

$\equiv_A^1$: $\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$

$\equiv_A^2$: $\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$

(d) **[8 Pkte]**

(i) Gegeben sei die Sprache (2 Pkte)

$$L = \Big\{ w \in \{0,1\}^* : w \text{ enthält das Teilwort } 111 \text{ und das Teilwort } 00 \Big\}.$$

Zeigen Sie die folgende Inäquivalenz bzgl. der Nerode-Relation durch Angabe eines Zeugen.

$00 \not\equiv_L 11:$ 111

(ii) Zeigen Sie, dass der Index der folgenden Sprache $K \subseteq \{0,1,\#\}^*$ unendlich ist. (6 Pkte)
(Zur Erinnerung: Für ein Wort w bezeichnet $|w|_1$ die Anzahl seiner Einsen und $|w|_0$ die Anzahl seiner Nullen.)

$$K := \Big\{ x\#y : x, y \in \{0,1\}^*, |x|_1 = 2 \cdot |y|_0 \Big\}$$

Beweis:

Wähle die Vertreter 1^{2n} für $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $1^{2i} \not\equiv_K 1^{2j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, denn der Zeuge $\#0^i$ trennt die beiden Wörter:

- $1^{2i}\#0^i \in K$.
- $1^{2j}\#0^i \notin K$.

Also sind die Wörter $\{1^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ paarweise inäquivalent, und somit gilt $\text{Index}(K) = \infty$.

Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatiken

[6 Pkte]

(i) Sei $\Sigma := \{a, b, c, d\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass gilt (3 Pkte)

$$L(G) = \{\, a^{2n} b^k c^k d^n \;:\; k, n \in \mathbb{N} \,\}.$$

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V = \Big\{ S, T \Big\}$

$P = \Big\{ S \to aaSd \,|\, T, \quad T \to bTc \,|\, \varepsilon \Big\}$

(ii) Seien $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, P_1)$ und $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, P_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. (3 Pkte)
Konstruieren Sie eine KFG $G = (\Sigma, V, S, P)$ mit $S \notin V_1 \cup V_2$, so dass

$$L(G) = L(G_1) \cdot L(G_2)$$

gilt, d. h. so dass G die Konkatenation der Sprachen $L(G_1)$ und $L(G_2)$ erzeugt.

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$

$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \cdot S_2\}$