Diskrete Modellierung

Wintersemester 2020/2021

Prof. Dr. Martin Hoefer
Marco Schmalhofer, Daniel Schmand

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 2

Ausgabe: 12.11.2020
Abgabe: 19.11.2020, **8:00**

Aufgabe 2.1 *Potenzmengen, kartesische Produkte, Komplemente* (12 + 11 = 23 Punkte)

a) Gegeben sei das Universum $U := \mathbb{N}$, die Menge $X := \{3, 5, 7\}$, die Menge $Y := \{2, 4, 8, 10\}$ und die Menge $Z := \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ aller Quadratzahlen.

Geben Sie jede der folgenden Mengen in extensionaler Form an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

i) $\mathcal{P}(\emptyset \times X)$

ii) $\{p \in \mathcal{P}(Y) : |p| < 2\}$

iii) $(X \times Z) \cap (Y \times Z)$

iv) $\left(Y \setminus \overline{Z}\right) \times X$

v) $(\overline{Z})^2 \cap \{(x, y) \in X \times Y : x \cdot y \leq 10\}$

vi) $\bigcap_{z \in Z} \overline{\{n \in \mathbb{N} : n \leq z\}}$

b) Seien A und B beliebige Mengen. Zeigen oder widerlegen Sie:

i) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

ii) Wenn $A \neq B$ gilt, dann gilt $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$.

Aufgabe 2.2 *Eigenschaften von Funktionen* (14 + 12 = 26 Punkte)

a) Betrachten Sie folgende Funktionen:

i) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_{>0}$ mit $f_1(z) := z^2 - 4z + 5$

ii) $f_2 : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f_2(a, b) := \begin{cases} b & \text{falls } a = 0, \\ -b & \text{sonst} \end{cases}$

iii) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $f_3(n) := \{m \in \mathbb{N} : m \leq n \text{ und } m \text{ ist durch 3 teilbar}\}$

iv) $f_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_4(a, b) := 2^{a+b} \cdot 7^{a+2b}$

Geben Sie für jede der obigen Funktionen f_i an, ob sie injektiv ist **und** ob sie surjektiv ist. Geben Sie für jede nicht-injektive Funktion f_i zwei Elemente $x, y \in \text{Def}(f_i)$ an, sodass $x \neq y$ und $f_i(x) = f_i(y)$ gilt. Geben Sie für jede nicht-surjektive Funktion f_i ein Element x aus dem Bildbereich an, sodass $x \notin \text{Bild}(f_i)$ gilt.

Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

b) Seien A, B und C beliebige Mengen und $f : A \to B$ sowie $g : B \to C$ beliebige Funktionen. Wir definieren die Funktion $h\colon A \to C$ als die *Verkettung* von f und g durch

$$h(a) := g(f(a)) \quad \text{f.a. } a \in A.$$

i) Zeigen Sie: Wenn h injektiv ist, dann ist f injektiv.

ii) Widerlegen Sie: Wenn h bijektiv ist, dann ist f bijektiv oder g bijektiv.

Aufgabe 2.3 *Modellierung von Containerschiffen* $(6+6+6+9=27$ Punkte)

Eine Reederei besitzt eine Flotte von Containerschiffen, mit denen verschiedene Container (z.B. Kleidung, Spielzeug, ...) transportiert werden sollen. Sei $\mathbf{C}$ die Menge der Container.

Ziel ist es, bestimmte Aspekte des Transports in vereinfachter Form zu modellieren.

a) Eine (Schiffs-)*Ladung* ist eine Teilmenge der Container.

 i) Definieren Sie die Menge $\mathbf{L}$ aller Ladungen.
 ii) Definieren Sie die Menge $\mathbf{L}_{150}$ aller Ladungen, die maximal 150 Container enthalten.
 iii) Welches Element in $\mathbf{L}_{150}$ repräsentiert eine Ladung, die nur aus den Containern Kleidung und Spielzeug besteht?

b) Der *Zustand* eines Schiffs wird charakterisiert durch seine Ladung, die Anzahl der Personen an Bord (1 bis 25) und die gebunkerte Treibstoffmenge in Tonnen (ganzzahlig, von 0 bis 300).

 i) Definieren Sie die Menge $\mathbf{Z}$ aller (möglichen) Zustände eines Schiffs.
 ii) Welches Element in $\mathbf{Z}$ drückt aus, dass ein Schiff leer ist, 12 Personen an Bord sind und die maximale Treibstoffmenge gebunkert ist.

c) Jedes Schiff hat eine *Ladekapazität* in Containern (von 1 bis 1000) und einen *Tiefgang* (gering, mittel oder hoch). Sei $\mathbf{R} \subseteq \{\mathbf{1, 2, \ldots, 1000}\} \times \{\mathbf{gering, mittel, hoch}\}$ die Relation aller in der Flotte vorkommenden Kombinationen aus Ladekapazität und Tiefgang.

 i) Welches Element in $\mathbf{R}$ bezeichnet ein Schiff mit Platz für 333 Container und hohem Tiefgang?
 ii) Definieren Sie mithilfe der Menge $\mathbf{R}$ die Menge $\mathbf{K}_{\text{gering}} \subseteq \{\mathbf{1, 2, \ldots, 1000}\}$ aller Ladekapazitäten, welche mit geringem Tiefgang in der Flotte vorkommen.

d) Durch die Funktion $f : \mathbf{L} \to \mathbb{R}_{>0}$ wird jeder Ladung ein positives, reellwertiges Gewicht zugeordnet[1]. Das Gewicht eines jeden Containers ist gegeben durch die Funktion $g : \mathbf{C} \to \mathbb{R}_{>0}$. Das Gesamtgewicht einer Ladung ist die Summe der Gewichte aller Container der Ladung.

 i) Geben Sie das Gesamtgewicht $f(l)$ einer beliebigen Ladung $l \in \mathbf{L}$ mithilfe von g an.
 ii) Definieren Sie mithilfe der Funktion f die Menge $\mathbf{L}_{\text{leicht}}$ aller Ladungen, die ein Gesamtgewicht von höchstens 4500 haben.
 iii) Definieren Sie mithilfe von g die Menge $\mathbf{L}_{\leq 5}$ aller Ladungen, die nur aus Containern mit Gewicht jeweils höchstens 5 bestehen.

[1] $\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen.

Aufgabe 2.4 *Relationale Datenbanken* ((3+3+6) + (6+6) = 24 Punkte)

In dieser Aufgabe modellieren wir die *relationale Datenbank* eines einfachen sozialen Netzwerks, in dem Personen Textnachrichten erstellen („to create“), liken („to like“) und teilen („to share“) können. Dabei werden *Datensätze* als Zeilen von Tabellen gespeichert, die mithilfe der Sprache *SQL* abgefragt werden können. Formal handelt es sich bei den Tabellen um Relationen und bei den Datensätzen um alle Tupel, die zur Relation gehören. Mit *Operatoren* können Datensätze miteinander kombiniert und Informationen extrahiert werden.

Definition. Für ein Tupel $x := (x_1, \ldots, x_n)$ bezeichne x_i die i-te Komponente von x. Für eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ entsteht das Tupel $(x_i : i \in I)$ aus x, indem alle Komponenten x_j mit $j \notin I$ gelöscht werden.

Seien R_1, R_2 und R_3 Relationen mit Stelligkeiten k, ℓ bzw. ℓ. Wir betrachten folgende *Operatoren*:

$$S_E(R_1) := \{x \in R_1 \ : \ E(x) \text{ ist wahr}\} \subseteq R_1 \qquad \text{„Selektion nach Eigenschaft } E\text{“}$$

$$R_1 \otimes R_2 := \{(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+\ell}) \ : \ (x_1, \ldots, x_k) \in R_1 \text{ und } (x_{k+1}, \ldots, x_{k+\ell}) \in R_2\} \qquad \text{„Kartesisches Produkt“}^2$$

$$R_2 \cup R_3 := \{x \ : \ x \in R_2 \text{ oder } x \in R_3\} \qquad \text{„Vereinigung“}$$

$$\pi_I(R_1) := \{(x_i : i \in I) \ : \ x \in R_1\} \qquad \text{„Projektion auf } I \subseteq \{1, \ldots, k\}\text{“}$$

In dieser Aufgabe sind keine Begründungen nötig.

a) Die Relationen *Person*, *Nachricht* und *Interaktion* sind unten gegeben. Bestimmen Sie die Relationen, die durch die folgenden *Ausdrücke* gegeben sind, in extensionaler Notation.
   i) $S_{x_3=\text{like}}(\text{Interaktion})$
   ii) $\pi_{\{1\}}(\text{Person} \cup \text{Interaktion})$
   iii) $\pi_{\{2,6\}}\big(S_{x_1=x_4 \text{ und } x_5=x_7 \text{ und } x_7=2}\big((\text{Person} \otimes \text{Interaktion}) \otimes \text{Nachricht}\big)\big)$

b) i) Geben Sie einen Ausdruck (wie in a)) an, der die folgende Relation beschreibt:

$$R := \{(\text{CaptainCrash, Volle Kraft voraus!}), (\text{Dr. Mod, could not deduce})\}$$

   ii) Geben Sie einen Ausdruck (wie in a)) an, der die Relation aller geteilten Nachrichten mit ihrem Text und dem Namen der teilenden Person beschreibt.

Kommentar: In SQL werden die Operatoren S, ⊗, ∪ und π durch die Schlüsselwörter WHERE (Selektion), FROM (kartesisches Produkt), UNION (Vereinigung) und SELECT (Projektion) dargestellt.

Relation „Person“

1: P_ID	2: P_Name	3: P_Beschreibung
1	CaptainCrash	Volle Kraft voraus!
2	driver	dreieckiges lenkrad
3	Dr. Mod	could not deduce
4	Sonnenthalbarbier	Ich rasiere.

Relation „Nachricht“

1 : N_ID	2 : N_Text
1	SOS SOS SOS
2	Hallo Welt!
3	return EXIT_FAILURE;
4	Rasiere ich mich selbst?
5	BITTE BITTE BITTE ...

Relation „Interaktion“

1: P_ID	2: N_ID	3: Aktion
1	1	create
1	1	like
2	2	create
2	5	like
3	2	like
3	2	share
3	3	create
4	3	share
4	4	create
4	5	create

[2] Wir haben hier ein anderes Symbol für das kartesische Produkt $\otimes$ verwandt. Beachten Sie den formalen Unterschied: $R_1 \times R_2 = \{((x_1, \ldots, x_k), (x_{k+1}, \ldots, x_{k+\ell})) \ : \ (x_1, \ldots, x_k) \in R_1 \text{ und } (x_{k+1}, \ldots, x_{k+\ell}) \in R_2\} \neq R_1 \otimes R_2$.