Diskrete Modellierung

Wintersemester 2020/2021

Prof. Dr. Martin Hoefer
Marco Schmalhofer, Daniel Schmand

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 3

Ausgabe: 19.11.2020
Abgabe: 26.11.2020, **8:00**

Aufgabe 3.1 *Wo ist der Gartenzwerg?* $(18 + 2 + 8 = 28$ Punkte)

In einer ruhigen Kleingartensiedlung nahe Frankfurt betritt der Löwenzahnzüchter Dandelion Florentin eines Morgens seinen Garten. Er stellt mit Schrecken fest: Der einundzwanzigste Gartenzwerg rechts des Gewächshauses fehlt! Umgehend zeigt er den Diebstahl an, woraufhin umfangreiche Ermittlungen eingeleitet werden. Schnell lässt sich der Kreis der Verdächtigen auf vier Personen aus der unmittelbaren Nachbarschaft reduzieren: *Clover*, *Daisy*, *Ivy* und *Viola*. Es bleibt vorerst unklar, wer den Gartenzwerg gestohlen hat. Oder waren gar mehrere Personen beteiligt?

Aus den Ermittlungsakten gehen folgende Fakten hervor:

1) Mehrere Zeugen berichten, dass sich *Daisy* und *Viola* seit Jahren streiten. Es ist also völlig ausgeschlossen, dass beide zusammen am Diebstahl beteiligt waren.
2) *Daisy* gibt zu Protokoll, dass sie *Clover* in der Tatnacht beim Übersteigen des Gartenzauns des Geschädigten beobachtet habe. Falls *Daisy* unschuldig ist, und ihre Aussage somit glaubwürdig ist, muss *Clover* schuldig sein.
3) *Ivy* und *Viola* behaupten beide, zur Tatzeit durch den nahegelegenen Park spaziert zu sein. Die dortige Videoüberwachung zeigt allerdings, dass nur eine Person in der Tatnacht durch den Park ging. Es ist nicht klar auszumachen, ob es *Ivy* oder *Viola* ist. Entweder *Viola* lügt und ist schuldig oder *Ivy* lügt und ist schuldig – während die jeweils andere unschuldig ist.
4) *Clover* gibt an, er habe *Daisy* oder *Ivy* mit dem Gartenzwerg davonrennen sehen. Er sei sich aber nicht sicher, wer von beiden es war. Diese Aussage könnte gelogen sein. *Clover* würde allerdings nur lügen, wenn er selbst schuldig wäre.
5) Im Blumenbeet des Geschädigten sind zwei verschiedene Schuhabdrücke gefunden worden, es müssen also mindestens zwei Personen am Diebstahl beteiligt gewesen sein. Der eine Abdruck passt nur zu *Daisy* oder *Viola*, der andere muss zu *Viola* oder *Ivy* gehören.

Lösen Sie den Fall!

a) Stellen Sie aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ auf, die die ermittelten Fakten widerspiegeln. Verwenden Sie die Variablen $\mathbf{C}$ (= „Clover ist schuldig“), $\mathbf{D}$ (= „Daisy ist schuldig“), $\mathbf{I}$ (= „Ivy ist schuldig“) und $\mathbf{V}$ (= „Viola ist schuldig“).

b) Konstruieren Sie eine Formel φ, die ausdrückt, dass alle fünf Fakten gelten.

c) Bestimmen Sie alle erfüllenden Belegungen von φ. Kann der Diebstahl anhand der ermittelten Fakten vollständig aufgeklärt werden? Oder können zumindest manche der Verdächtigen definitiv als schuldig bzw. unschuldig identifiziert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Überprüfen Sie am Ende, ob Ihre Antwort wirklich mit den Fakten 1) bis 5) konsistent ist.

Aufgabe 3.2 *Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit, Tautologien* (16 + 14 = 30 Punkte)

a) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln φ_i an, ob sie

- allgemeingültig,
- unerfüllbar oder
- sowohl erfüllbar als auch falsifizierbar

ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort, z. B. durch Angabe einer Wahrheitstafel oder einer erfüllenden und einer falsifizierenden Belegung oder durch Termumformung.

i) $\varphi_1 := (A \land B) \to (\neg A \lor B)$

ii) $\varphi_2 := (\mathbf{1} \to A) \land (A \to B) \land (B \to C) \land (C \to \mathbf{0})$

iii) $\varphi_3 := \neg\big(A \leftrightarrow \neg(B \oplus \neg C)\big)$

iv) $\varphi_4 := \left(\bigwedge_{i=1}^{7} V_i \oplus V_{i+1}\right)$

b) Bestimmen Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln ψ_i die Menge aller erfüllenden Belegungen $\mathcal{B}$ mit $\mathrm{Def}(\mathcal{B}) = \mathrm{Var}(\psi_i)$.

i) $\psi_1 := \neg\big((X \oplus Y) \lor (X \oplus Z) \lor (Y \oplus Z)\big)$

ii) $\psi_2 := \bigwedge_{i=1}^{17} (V_i \to V_{i+1})$

iii) $\psi_3 := \bigwedge_{i=1}^{n} (V_i \leftrightarrow V_{n+i})$, wobei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist.

Hinweis: Schauen Sie sich beispielhaft für kleine Werte von n an, wie die erfüllenden Belegungen aussehen, und versuchen Sie das Ergebnis für allgemeine $n \in \mathbb{N}_{>0}$ zu verallgemeinern. Sie können SymPy als Hilfsmittel benutzen. Sie müssen Ihre Antwort nicht beweisen.

Aufgabe 3.3 *Semantische Folgerungen* (6 + 6 + 6 = 18 Punkte)

Seien φ, ψ und χ beliebige aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Wenn $\varphi \models \psi$, dann auch $\psi \models \varphi$.

b) Wenn $(\varphi \lor \psi) \models \varphi$, dann $\psi \models \varphi$.

c) $\big((\varphi \leftrightarrow \psi) \to \chi\big) \;\models\; \big(\varphi \leftrightarrow (\psi \to \chi)\big)$

Aufgabe 3.4 *Maximierung erfüllter Aussagen* (12 + 6 + 6 = 24 Punkte)

Bekannterweise gehen Studierende der Informatik stets einer der folgenden Tätigkeiten nach: *Lernen* oder *Feiern*. Die vier Studierenden *Anne*, *Bernd*, *Christine* und *Dirk* gründen gemeinsam eine virtuelle WG mit zwei Räumen, in denen jeweils *zwei* Personen Platz haben. Einer der Räume ist nur zum Lernen, der andere nur zum Feiern. Jeder muss stets in einem der beiden Räume sein.

Für den heutigen Nachmittag stehen die Wünsche fest:

I) *Anne* und *Christine* möchten das gleiche machen.

II) *Bernd* möchte auf keinen Fall mit *Anne* oder *Dirk* zusammen feiern.

III) *Anne* und *Dirk* möchten, dass *Bernd* feiert.

IV) *Christine* möchte, dass *Anne* und *Bernd* nicht das gleiche machen.

Wir modellieren die Raumverteilung mit den aussagenlogischen Variablen A (Anne lernt), B (Bernd lernt), C (Christine lernt) und D (Dirk lernt).

a) Stellen Sie aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ über den Variablen A, B, C, D auf, welche die gestellten Bedingungen in I) bis IV) widerspiegeln.

b) Eine Person ist zufrieden, wenn all ihre Wünsche erfüllt sind. Stellen Sie Formeln ψ_A, ψ_B, ψ_C und ψ_D in Abhängigkeit von $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ auf, welche die Zufriedenheit von *Anne*, *Bernd*, *Christine* und *Dirk* widerspiegeln.

c) Nicht alle Personen sind zufrieden zu stellen. Bestimmen Sie mithilfe der Variablen A, B, C, D und der Formeln $\psi_A, \ldots, \psi_D$ eine Verteilung der vier Personen auf die beiden Räume, so dass in jedem Raum zwei Personen sind und die Anzahl zufriedener Personen maximal ist. Begründen Sie, warum Ihre Zuteilung gültig und optimal ist.