Prof. Dr. Martin Hoefer
Marco Schmalhofer, Daniel Schmand

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität


# Übungsblatt 4

Ausgabe: 26.11.2020
Abgabe: 03.12.2020, **8:00**

**Aufgabe 4.1** *Normalformen* $(16 + 9 + 3 = 28$ Punkte)

a) Gegeben sei die Formel $\varphi := \big((A \wedge \neg B) \oplus C\big) \vee \big(\neg A \wedge \neg B\big)$.

   i) Geben Sie eine zu $\varphi$ äquivalente Formel $\kappa$ in KNF an.
   ii) Geben Sie eine zu $\neg\varphi$ äquivalente Formel $\delta$ in DNF an.
   iii) Geben Sie eine zu $\varphi$ äquivalente Formel $\delta'$ in DNF an.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

b) i) Geben Sie eine zu $\psi := (X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_2 \rightarrow X_3) \wedge (X_3 \rightarrow X_1)$ äquivalente Formel $\psi'$ in DNF an.
   ii) Geben Sie eine zu $\chi := (X_1 \oplus X_2) \vee (X_2 \leftrightarrow X_3) \vee (X_3 \oplus X_4)$ äquivalente Formel $\chi'$ in KNF an.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

c) Geben Sie eine zu $\omega := \mathbf{1}$ äquivalente Formel $\omega'$ in KNF an.

   Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

**Aufgabe 4.2** *Das n-Springer-und-Läufer-Problem* $(6+(4+6+6+4+4)+6+4 = 40$ Punkte)

Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sollen *Springer* und *Läufer* auf einem $n \times n$-Schachbrett so platziert werden, dass sie sich nicht gegenseitig *bedrohen*, d. h. keine Figur soll eine andere Figur schlagen können. Außerdem muss in jeder Spalte und in jeder Zeile mindestens eine Figur stehen und es muss insgesamt mindestens einen Springer und mindestens einen Läufer geben. Natürlich kann auf jedem Feld höchstens eine Figur stehen. Eine Platzierung gemäß dieser Regeln bezeichnen wir als *Lösung* des $n$-Springer-und-Läufer-Problems.

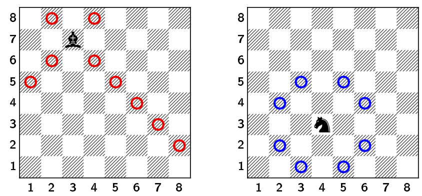

**Abbildung 1**: Zwei $8 \times 8$-Schachbretter. Der Läufer auf $(7, 3)$ auf dem linken Brett bedroht alle rot markierten Felder. Der Springer auf $(3, 4)$ auf dem rechten Brett bedroht alle blau markierten Felder.

a) Besitzt das $n$-Springer-und-Läufer-Problem für $n\!=\!3$ bzw. $n\!=\!4$ eine Lösung?

b) Modellieren Sie das $n$-Springer-und-Läufer-Problem durch aussagenlogische Formeln. Verwenden Sie im Folgenden für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die aussagenlogische Variable $\mathbf{L}_{i,j}$ mit der Bedeutung „auf dem Feld $(i, j)$ in Zeile $i$ und Spalte $j$ steht ein Läufer" sowie die Variable $\mathbf{S}_{i,j}$ mit der Bedeutung „auf dem Feld $(i, j)$ in Zeile $i$ und Spalte $j$ steht ein Springer".

Geben Sie jeweils auch eine kurze umgangssprachliche **Erläuterung** Ihrer Formeln an.

*Hinweis*: Notationen wie $\bigvee_{i=1}^{n}(\dots)$, $\bigwedge_{i=1}^{n}(\dots)$ oder $\bigwedge_{(i,j)\in\dots}(\dots)$ und Beispiel 3.48 (Sudoku) aus dem Skript können hilfreich sein.

i) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{Höchstens}_{i,j}$, die aussagt, dass auf dem Feld $(i, j)$ höchstens eine Schachfigur steht.

ii) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{Springer}_{i,j}$, die aussagt: „Wenn ein Springer auf dem Feld $(i, j)$ steht, darf auf den von ihm bedrohten Feldern keine weitere Schachfigur stehen".

*Hinweis*: Für jedes Feld $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(i,j) := \{\ &(i{+}1, j{+}2), (i{+}2, j{+}1), (i{+}2, j{-}1), (i{+}1, j{-}2),\\ &(i{-}1, j{-}2), (i{-}2, j{-}1), (i{-}2, j{+}1), (i{-}1, j{+}2)\ \} \cap \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

die Menge aller von einem Springer auf $(i, j)$ bedrohten Felder. Nutzen Sie diese Menge für die Konstruktion der Formel $\mathsf{Springer}_{i,j}$.

iii) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{Läufer}_{i,j}$, die aussagt: „Wenn ein Läufer auf dem Feld $(i, j)$ steht, darf in den Diagonalen des Feldes $(i, j)$ keine weitere Schachfigur stehen".

iv) Konstruieren Sie Formeln $\mathsf{Zeile}_i$ bzw. $\mathsf{Spalte}_j$, die aussagen, dass in Zeile $i$ bzw. Spalte $j$ mindestens eine Schachfigur steht.

v) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{Mindestens}$, die aussagt, dass mindestens ein Springer und mindestens ein Läufer auf dem Schachbrett stehen.

c) Geben Sie eine Formel $\varphi_n$ an, sodass die erfüllenden Belegungen von $\varphi_n$ genau den Lösungen des $n$-Springer-und-Läufer-Problems entsprechen.

d) Geben Sie eine zu $\varphi_n$ äquivalente Formel $\psi_n$ in KNF an.

## Aufgabe 4.3 *Resolution* (4 + 10 + 10 = 24 Punkte)

In Teil b) und c) genügt eine graphische Lösung.

a) Erläutern Sie, warum der folgende „Resolutionsschritt" **falsch** ist:

$$\frac{\{X, \neg Y\}, \{\neg X, Y\}}{\epsilon}$$

b) Zeigen Sie mit Resolution, dass die folgende KNF-Formel $\psi$ unerfüllbar ist.

$$\psi := E \wedge (\neg C \vee \neg E) \wedge (B \vee C \vee \neg E) \wedge (A \vee \neg B \vee C \vee \neg E) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge (C \vee \neg E \vee D)$$

*Hinweis*: Wandeln Sie die Formel zunächst in eine Menge von Disjunktionstermen um.

c) Leiten Sie mittels Resolution den leeren Disjunktionsterm $\epsilon$ aus der Menge $K$ her.

$$K := \Big\{\{\neg A, B, \neg C\}, \{A, \neg C\}, \{\neg A, C\}, \{B, C\}, \{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\}\Big\}$$

**Aufgabe 4.4** *Zweistufige Normalform* $(4+6+20^* = 10$ Punkte $+ 20^*$ Extrapunkte$)$

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Verallgemeinerung von DNFs und KNFs, die *zweistufige Normalform*. Eine Formel der Form

$$\varphi := \bigodot_{i=0}^{k} \boxdot_{j=1}^{m_i} l_{ij}$$

mit *Junktoren* $\odot, \boxdot \in \{\vee, \wedge, \leftrightarrow, \oplus\}$ und *Literalen* $l_{ij}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, m_i\}$ heißt zweistufige Normalform, kurz ZNF. Beispiele für Formeln in ZNF sind:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 := (X_1 \oplus \neg X_2) \wedge (\neg X_2 \oplus X_3) \wedge X_1 && \text{mit } \odot = \wedge, \boxdot = \oplus \\
&\varphi_2 := (\neg X_1 \vee X_3 \vee X_4) \leftrightarrow (X_1 \vee X_2) \leftrightarrow \neg X_2 && \text{mit } \odot = \leftrightarrow, \boxdot = \vee \\
&\varphi_3 := (X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge X_3) && \text{mit } \odot = \vee, \boxdot = \wedge
\end{aligned}$$

Mit Satz 3.67 im Skript wurde gezeigt, dass es Formeln $\varphi_n$ über $n$ Variablen gibt, so dass sowohl jede DNF als auch jede KNF aus mindestens $2^{n-1}$ Termen besteht. Ist eine kurze Darstellung einer jeden Formel mit den mächtigeren ZNFs möglich? Diese Frage möchten wir im Folgenden untersuchen.

a) Geben Sie eine zu $\varphi_1$ äquivalente Formel $\varphi_1'$ in DNF an.

b) Geben Sie eine zu $\psi := \neg(X_1 \rightarrow \neg X_2) \leftrightarrow (X_3 \wedge \neg X_4) \leftrightarrow (X_1 \oplus \neg X_4)$ äquivalente Formel $\psi'$ in ZNF an.

c) Widerlegen Sie die folgende Aussage. Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: Zu jeder aussagenlogischen Formel $\chi_n$ über den Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gibt es eine äquivalente ZNF $\chi_n'$ über den Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, so dass $\chi_n'$ höchstens $n$ Terme hat.

   *Hinweis*: Überlegen Sie sich zunächst anhand einer Wahrheitstafel, wie viele semantisch verschiedene Formeln über $n$ Variablen es gibt. Finden Sie anschließend eine obere Schranke auf die Anzahl aller aus höchstens $n$ Termen bestehenden ZNFs über $n$ Variablen.