Diskrete Modellierung

Wintersemester 2020/2021

Prof. Dr. Martin Hoefer
Marco Schmalhofer, Daniel Schmand

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

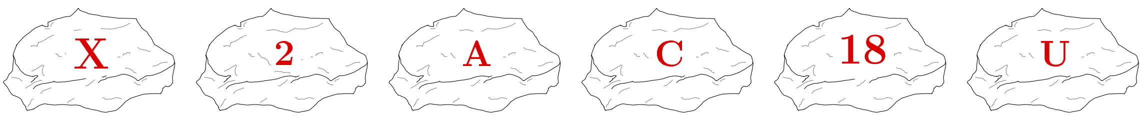
Übungsblatt 5

Ausgabe: 03.12.2020
Abgabe: 10.12.2020, **8:00**

Aufgabe 5.1 *Quantoren, Implikationen, Negationen* $(6 + 12 + 9 = 27$ Punkte)

a) Vor Ihnen liegen sechs Felsplatten mit Gewichten zwischen ein und drei Tonnen. Die Felsen sind auf der einen Seite mit einem Buchstaben aus der Menge $\{A, B, \ldots, Z\}$ und auf der anderen Seite mit einer natürlichen Zahl beschriftet. Wir können jeweils nur eine der beiden Beschriftungen sehen und wollen prüfen, ob folgende Aussage wahr ist:

Jeder Fels, der auf der einen Seite keinen Vokal hat,
hat auf der anderen Seite eine zweistellige Zahl.



Natürlich könnten wir **alle sechs** Felsen umdrehen, um den Wahrheitsgehalt der Aussage zu überprüfen, aber es geht auch einfacher.

Welche Felsen **müssen** wir umdrehen?

b) Betrachten Sie eine Färbung $f : \mathbb{Z} \to \{\text{rot}, \text{blau}\}$ der ganzen Zahlen. Folgende Aussage über f sei wahr: *Für jede rot gefärbte Zahl gibt es eine* ***größere*** *blau gefärbte Zahl.*

Welche der folgenden Aussagen kann man für jede solche Funktion f folgern?
Begründungen sind nicht erforderlich.

i) Für jede blaue Zahl gibt es eine kleinere rote Zahl.
ii) Es gibt keine aufeinanderfolgenden roten Zahlen.
iii) Es gibt unendlich viele blaue Zahlen.
iv) Es gibt eine **injektive** Funktion $g : R \to B$, die jeder roten Zahl eine blaue zuordnet. Dabei ist $R = \{z \in \mathbb{Z} : f(z) = \text{rot}\}$ und $B = \{z \in \mathbb{Z} : f(z) = \text{blau}\}$.

c) Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussagen jeweils umgangssprachlich.
Begründungen sind nicht erforderlich.

i) Jeder kehrt vor seiner eigenen Tür.
ii) Niemand hat die Absicht, eine Lüge auszusprechen.
iii) Nur wenn ich Übungszettel bearbeite, kann ich Bonuspunkte bekommen.

Hinweis: Aussagen der Form: „Es gilt nicht ...“ sind nicht ausreichend!

Aufgabe 5.2 *Beweise* (9 + 9 + 18 + 15* = 36 Punkte + 15* Extrapunkte)

a) Zeigen Sie, dass die Zahl $1 + \sqrt{18}$ irrational ist.

   Hinweis: Indirekter Beweis. Sie dürfen annehmen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

b) Das *geometrische Mittel* der reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ ist definiert als $\bar{x} := \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$.

   Zeigen Sie: Es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_i \leq \bar{x}$.

   Hinweis: Indirekter Beweis.

c) Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion nach n:

   i) $\sum\limits_{i=0}^{n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 \leq \frac{1}{2} n^3 \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$

d*) *Dieser Aufgabenteil ist eine Bonusaufgabe.*

   Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monotone Funktion, d.h. es gelte $f(a) \leq f(b)$ für alle $a \leq b$.

   Zeigen Sie: Wenn f surjektiv ist, dann gilt $f(n) \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Hinweis: Indirekter Beweis.

Aufgabe 5.3 *Fliesen verlegen* (19 Punkte)

Gegeben sei ein quadratisches $2^n \times 2^n$-Schachbrett mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$, bei dem ein Quadrant (d. h. ein quadratisches Viertel) des Brettes entfernt wurde, sodass ein L-förmiges Brett übrig bleibt (vgl. Abb. 1). Das L-förmige Brett nennen wir ein $2^n \times 2^n$-*L-Schachbrett*.

Wir fragen uns, ob wir alle verbliebenen Felder mit *L-Kacheln* auslegen können. Dabei überdeckt jede L-Kachel genau drei Felder, hat die Form wie links in Abb. 1 dargestellt und darf rotiert werden. In einer Kachelung dürfen sich natürlich keine L-Kacheln überlappen.

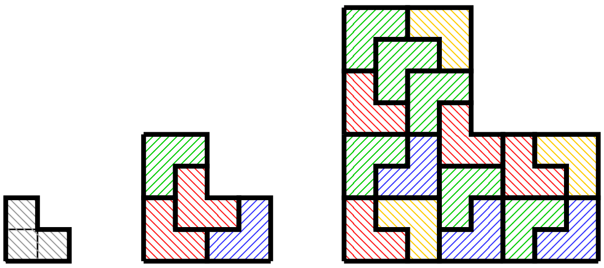


Abbildung 1: Links: eine L-Kachel. Mitte bzw. Rechts: ein 4×4 bzw. 8×8 L-Schachbrett mit L-Kachelung.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach n: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ besitzt das $2^n \times 2^n$-L-Schachbrett eine Kachelung mit L-Kacheln.

Hinweis: Hilft Ihnen eine L-Kachelung des $2^n \times 2^n$-L-Schachbretts weiter, wenn Sie ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-L-Schachbrett mit L-Kacheln auslegen wollen?

Aufgabe 5.4 *Korrektheit rekursiver Programme beweisen* (18 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie folgende rekursive Funktion zur Berechnung der Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ in Pseudocode:

```
potenz(n) {
    if(n == 0){
        return {∅};
    }

    P := potenz(n−1); // alle Mengen ohne n

    Q := ∅; // alle Mengen mit n

    für jede Menge M in P:
       Q := Q ∪ {M ∪ {n}} // jede Menge in P duplizieren und n einfügen

    return P ∪ Q;
}
```

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass der Aufruf `potenz(`n`)` die Potenzmenge der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ berechnet.