Diskrete Modellierung

Wintersemester 2020/2021

Prof. Dr. Martin Hoefer
Marco Schmalhofer, Daniel Schmand

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 6

Ausgabe: 10.12.2020
Abgabe: 17.12.2020, **8:00**

Aufgabe 6.1 *Fibonacci-Farne* ((7+12) + 8 = 27 Punkte)

Gegeben seien Winkel α und β zwischen 0° und 90° sowie Zahlen a_1, a_2, h_1, h_2, b zwischen 0 und 1. Der n-te *Fibonacci-Farn* (kurz *Farn*) F_n wird durch folgenden rekursiven Algorithmus konstruiert:

(A) F_1 ist eine vertikale Linie der Länge 1.

(B) Um F_n für $n \geq 2$ zu erhalten, gehe wie folgt vor:

- Beginne mit einer vertikalen Linie der Länge 1. Dies ist der *Stamm* des Farns F_n.
- Setze oben auf den Stamm einen um β nach rechts gedrehten und um den Faktor b verkleinerten Farn F_{n-1}.
- Falls $n \geq 3$:
  - Setze an den Stamm in Höhe h_1 einen um α nach links gedrehten und um den Faktor a_1 verkleinerten Farn F_{n-2}.
  - Setze an den Stamm in Höhe h_2 einen um $\alpha + \beta$ nach rechts gedrehten und um den Faktor a_2 verkleinerten, spiegelverkehrten Farn F_{n-2}.

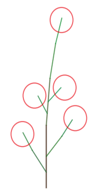
Abbildung 1: Von links nach rechts: Die Fibonacci-Farne $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_9$ und F_{13}, jeweils mit Parametern $\alpha = 40°$, $\beta = 5°$, $a_1 = 0.43$, $a_2 = 0.35$, $b = 0.8$, $h_1 = 0.25$, $h_2 = 0.6$.

a) Sei B_n die Anzahl der **Blattspitzen** des n-ten Farns F_n. Beispielsweise gilt $B_4 = 5$, siehe die roten Kreise in der Abbildung rechts.

   i) Geben Sie eine Rekursionsgleichung für B_n an.
   Hinweis: Geben Sie sowohl Rekursionsanfang als auch Rekursionsschritt an.

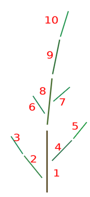
   ii) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ gilt:} \quad B_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$



F_4 mit markierten Blattspitzen

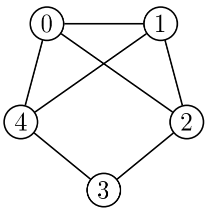
b) Sei L_n die Anzahl der **Linien** des n-ten Farns F_n. Beispielsweise gilt $L_4 = 10$. Geben Sie eine Rekursionsgleichung für L_n an.



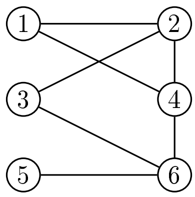
F_4 mit markierten Linien

Aufgabe 6.2 *Grundbegriffe der Graphentheorie* (9 + 6 + 10 = 25 Punkte)

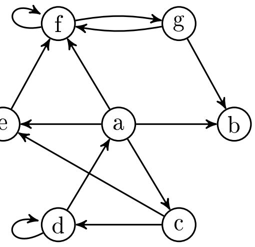
Die Graphen G_1, G_2, G_3 und G_4 seien wie folgt in grafischer Darstellung gegeben:



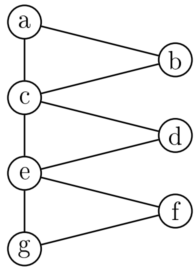
G_1



G_2



G_3



G_4

a) In den Teilaufgaben i) bis iii) sind keine Begründungen notwendig.

i) Geben Sie den Komplementgraphen $\tilde{G_1}$ von G_1 in grafischer Darstellung an.

ii) Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten von G_3 an.

iii) Betrachten Sie G_4. Geben Sie alle einfachen Wege der Länge genau 5 von Knoten a zu Knoten g an.

b) i) Besitzt G_2 einen Hamiltonweg? ii) Besitzt G_2 einen Eulerweg?

Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Weg an; falls nein, wieso nicht?

c) i) Geben Sie einen ungerichteten Graphen $G=(V, E)$ mit $|V|=6$ Knoten in grafischer Darstellung an, so dass $\text{Grad}_G(v) = 3$ für alle $v \in V$ gilt.

ii) Zeigen oder Widerlegen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gibt es einen ungerichteten Graphen $G=(V, E)$ mit $|V|=n$ Knoten, so dass $\text{Grad}_G(v) = 3$ für alle $v \in V$ gilt.

Aufgabe 6.3 *Rechnernetzwerke als ungerichtete Graphen* (9 + 18 + 9 = 36 Punkte)

Sie bekommen die Aufgabe, eine gerade Anzahl n von Rechnern zu vernetzen. Ihr Auftraggeber stellt folgende Anforderungen an das Netzwerk:

1. Zwischen je zwei Rechnern muss es stets einen Leitungsweg geben.
2. Insgesamt müssen es weniger als $2n$ Leitungen sein.
3. Mindestens 10% der Rechner müssen jeweils an mindestens $n/2$ Leitungen angeschlossen sein.

Ein solches Netzwerk lässt sich als ungerichteter Graph darstellen: Ein Knoten repräsentiert einen Rechner und eine Kante repräsentiert eine Leitung.

a) Übersetzen Sie die obigen drei Anforderungen in Eigenschaften ungerichteter Graphen $G{=}(V, E)$.

Beispiel: Die Anforderung „Es gibt keinen Rechner, an dem keine Leitung angeschlossen ist“ lässt sich übersetzen in „$\mathrm{Grad}_G(v) > 0$ für alle $v \in V$“.

b) Prüfen Sie, welche der verlangten Eigenschaften die Netzentwürfe haben, die durch die unten definierten Graphen repräsentiert werden, und welche nicht. Geben Sie jeweils auch eine **Skizze** des Graphen an und begründen Sie Ihre Antworten.

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade mit $n \geq 10$ und $V := \{1, \dots, n\}$.

i) $G_1 = (V, E_1)$ mit $E_1 = \big\{\{i, j\} : i \text{ gerade und } j \text{ ungerade}\big\}$

ii) $G_2 = (V, E_2)$ mit $E_2 = \big\{\{i, j\} : \text{entweder } i, j \text{ beide gerade oder beide ungerade}\big\}$

iii) $G_3 = (V, E_3)$ mit $E_3 = \big\{\{i, j\} : i + j = n + 1\big\} \cup \big\{\{i, j\} : i + j = n\big\}$

c) Widerlegen Sie: Für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ gibt es einen Graphen $G{=}(V, E)$ über den Knoten $V{=}\{1, \dots, n\}$, der alle drei Eigenschaften erfüllt.

Hinweis: Indirekter Beweis.

Aufgabe 6.4 *Taxifahrer ärgern* (4 + 8 = 12 Punkte)

Alice und Bob sitzen gemeinsam im Taxi und spielen das folgende Spiel: An jeder Kreuzung nennen sie abwechselnd dem Taxifahrer die nächste Straße. Dieser fährt die genannte Straße jeweils bis zur nächsten Kreuzung. Sobald der Taxifahrer an eine Kreuzung kommt, an der er bereits vorher war, hegt er Zweifel an der geistigen Gesundheit seiner Fahrgäste und wirft sie raus. Verloren hat der, der als erstes keine Straße mehr nennen kann, ohne dass die beiden rausgeworfen werden.

Die Kreuzungen und Straßen sind durch einen *endlichen, zusammenhängenden* und *ungerichteten* Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, n\}$ gegeben. Die Knoten V entsprechen den Kreuzungen, die Kanten E den Straßen zwischen den Kreuzungen. Das Taxi befindet sich am Anfang in Knoten 1 und Alice fängt an.

Wir nennen einen Zug von Spieler S in einer Spielsituation *gewinnbringend* für S, wenn der Gegenspieler nach dem Zug trotz optimalem Spiel nicht gewinnen kann – unter der Annahme, dass S selbst optimal weiterspielt. S hat eine *Gewinnstrategie* genau dann, wenn diese Strategie in jeder Spielsituation, in der es einen gewinnbringenden Zug für S gibt, einen solchen Zug auch vorschreibt.

a) Geben Sie für den folgenden Graphen G^* ein perfektes Matching an und leiten Sie daraus eine Gewinnstrategie für Alice auf G^* ab.

b) Angenommen, ein Graph G besitzt ein perfektes Matching. Beschreiben Sie eine allgemeine Gewinnstrategie für Alice.

G^*: