Diskrete Modellierung

Wintersemester 2020/2021

Prof. Dr. Martin Hoefer
Marco Schmalhofer, Daniel Schmand

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 7

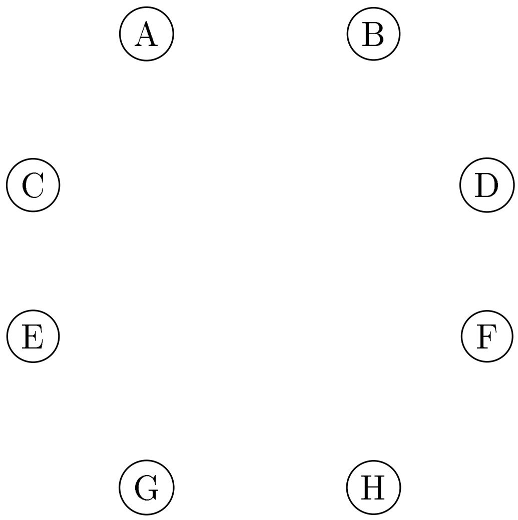
Ausgabe: 17.12.2020
Abgabe: 14.01.2021, **8:00**

Aufgabe 7.1 *Streit unter Schafen* (7 + 8 = 15 Punkte)

Ein Schäfer besitzt acht Schafe A, B, C, D, E, F, G, H. Diese muss er über den Winter in *drei* Ställen unterbringen. Die Ställe können jeweils alle Schafe aufnehmen, es gibt jedoch folgende Unverträglichkeiten zwischen den Schafen:

- Schaf A kann die Schafe B und E aufgrund ihres üppigen Fells nicht leiden.
- Schaf C hasst die Schafe B, E und G, da diese größer sind.
- Schaf D mag die Schafe B und G nicht, weil diese ständig „muh“ statt „mäh“ sagen.
- Schaf H verträgt sich nicht mit Schaf E bzw. G, da diese nicht Schach spielen können.
- Schaf F wird ständig „Schaf des Jahres“ und wird deshalb von jedem Schaf außer A gehasst.

a) Zeichnen Sie den ungerichteten Konfliktgraphen $G = (V, E)$ mit $V = \{A, B, \ldots, H\}$.
Verwenden Sie folgende Vorlage:



b) Gibt es eine konfliktfreie Aufteilung der acht Schafe auf die drei Ställe?
Wenn ja, geben Sie eine solche an. Wenn nein, begründen Sie, warum es keine gibt.

Welches graphentheoretische Problem ist hier zu lösen?

Aufgabe 7.2 *Flussüberquerung* $(13 + 15 + 8 + 15^* = 36$ Punkte $+ 15^*$ Extrapunkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir *unabhängige Knotenmengen* und *Knotenüberdeckungen* (siehe auch Abschnitt 5.1.3.3 im Skript) eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$:

Eine Knotenmenge $I \subseteq V$ heißt *unabhängig*, wenn $\{u, v\} \notin E$ f.a. $u, v \in I$ gilt, wenn also keine zwei Knoten in I durch eine Kante verbunden sind.

Eine Knotenmenge $C \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckung*, wenn $e \cap C \neq \emptyset$ f.a. $e \in E$ gilt, wenn also jede Kante mindestens einen Endpunkt in C besitzt.

Ein Bauer besitzt eine Menge V von Tieren, welche er über einen reißenden Fluss auf eine andere Weide bringen will. Am Ufer liegt ein Boot, welches ihn und $k < |V|$ seiner Tiere tragen kann. Er muss also mehrfach fahren, um alle Tiere über den Fluss zu bringen.

Einige der Tiere vertragen sich nicht und würden einander angreifen, wenn er nicht bei ihnen ist. Die Konflikte zwischen den Tieren sind durch einen ungerichteten Konfliktgraphen $G = (V, E)$ gegeben: Gibt es eine Kante $\{u, v\} \in E$ zwischen zwei Tieren $u, v \in V$, dann darf er die beiden Tiere nicht zusammen auf einer Seite des Flusses zurück lassen.

Eine Lösung des Problems ist eine Folge von Bootsfahrten, so dass niemals zwei in Konflikt stehende Tiere an einem Ufer zurück gelassen werden und am Ende alle Tiere, der Bauer und das Boot am anderen Ufer sind.

a) Zeigen Sie: Wenn es keine unabhängige Knotenmenge I mit $|I| \geq |V| - k$ in G gibt, dann gibt es keine Lösung.

   Hinweis: Betrachten Sie die erste Fahrt.

b) Zeigen Sie: Wenn $k \geq |C| + 1$ für eine Knotenüberdeckung C von G gilt, dann gibt es eine Lösung.

   Hinweis: Beschreiben Sie mithilfe von C eine konfliktfreie Folge von Überfahrten.

c) Zeigen oder Widerlegen Sie: Wenn es eine Lösung gibt, dann gilt $k \geq |C| + 1$ für eine Knotenüberdeckung C von G.

d*) Sei $l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn es eine unabhängige Knotenmenge der Kardinalität l in G gibt, dann gibt es eine Knotenüberdeckung der Kardinalität $|V| - l$ in G.

Aufgabe 7.3 *Syntax- und Rekursionsbäume* $(6 + 7 + 8 = 21$ Punkte)

a) Geben Sie den Syntaxbaum für die aussagenlogische Formel $\varphi := \big((x \vee y) \leftrightarrow \neg(\neg x \vee z)\big) \wedge (y \wedge \neg z)$ an. (Ohne Begründung)

b) Betrachten Sie die Funktion `farn_naiv`, welche auf naive Weise die Anzahl der Blätter des n-ten Fibonacci Farns F_n (siehe Aufgabe 6.1) für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ rekursiv berechnet:

```
farn_naiv(n):
    if(n <= 2) return 1;
    else return ( 2*farn_naiv(n-2) + farn_naiv(n-1) );
```

Geben Sie den Rekursionsbaum Baum(5) für den Aufruf `farn_naiv(5)` in grafischer Darstellung an. (Ohne Begründung)

Ist Baum(5) ein Binärbaum? Ist er ein voller Binärbaum? Ist er ein vollständiger Binärbaum?

c) Betrachten Sie die Funktion `power` zur Berechnung der k-ten Potenz x^k einer ganzen Zahl x :

```
def power(x, k):
    if k == 0:
        return 1
    elif k % 2 == 0:  # falls k gerade
        return power(x*x, k/2)
    else:
        return x * power(x, k-1)
```

Geben Sie den Rekursionsbaum Baum(10,9) für den Aufruf `power(10,9)` in grafischer Darstellung an. Beschriften Sie Knoten, welche einem Aufruf `power(x,k)` entsprechen, mit dem Paar (x, k). (Ohne Begründung)

Aufgabe 7.4 *Modellierung von Spielen durch DAGs* $(12 + 4 + 10 = 26$ Punkte)

Wir betrachten das Spiel NIMMFÜNFHALBEODERDRITTEL, das wie folgt definiert ist: Zwei Spieler, Alice und Bob, spielen gegeneinander. Zu Beginn des Spiels liegen 35 Hölzer auf dem Tisch. Die beiden Spieler sind abwechselnd am Zug, Alice beginnt. In jedem Zug kann der ziehende Spieler eine der folgenden Aktionen ausführen:

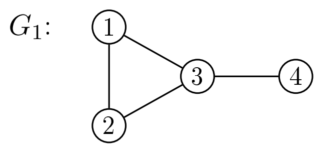
I) fünf Hölzer vom Tisch entfernen,
II) falls eine gerade Anzahl an Hölzern auf dem Tisch liegt, den Haufen halbieren, also die Hälfte der Hölzer vom Tisch nehmen.
III) falls eine durch Drei teilbare Anzahl an Hölzern auf dem Tisch liegt, den Haufen dritteln, also zwei Drittel der Hölzer vom Tisch nehmen.

Es gewinnt der Spieler, der als letztes einen Zug ausführen konnte (also der Spieler, nach dessen Zug ein oder kein Holz auf dem Tisch liegt).

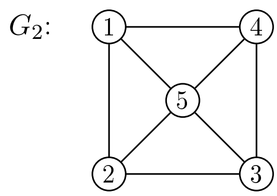
a) Modellieren Sie das Spiel durch einen gerichteten azyklischen Graphen (DAG). Ein Knoten repräsentiert dabei einen Spielzustand und eine Kante einen Zug eines Spielers. Geben Sie eine kurze Erläuterung Ihrer Modellierung an.
b) Ist es eine gute Idee für Bob, im zweiten Zug den Haufen zu halbieren?
c) Eine Gewinnstrategie für einen Spieler ist eine Vorschrift, die angibt, welcher Zug als nächstes getätigt werden soll, um garantiert zu gewinnen.
    i) Besitzt Alice eine Gewinnstrategie?
    ii) Besitzt Bob eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 7.5 *Gradsequenzen* (10* Extrapunkte)

Die *Gradsequenz* $\mathrm{Seq}(G) \in \mathbb{N}^n$ eines ungerichteten endlichen Graphen $G = (V, E)$ mit $n = |V|$ Knoten ist die aufsteigend sortierte Folge aller Knotengrade in G. Beispiele sind:



$\mathrm{Seq}(G_1) = (1, 2, 2, 3)$



$\mathrm{Seq}(G_2) = (3, 3, 3, 3, 4)$

Zeigen oder Widerlegen Sie: Wenn zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ die gleiche Gradsequenz $\mathrm{Seq}(G) = \mathrm{Seq}(G')$ haben, dann sind sie isomorph.

Aufgabe 7.6 *Kontaktgraph* (10* Extrapunkte)

In einer Firma mit 12 Mitarbeitern wurde eine Person positiv auf Corona getestet. Zur Verfolgung der Kontakte innerhalb der Firma trägt jeder Mitarbeiter einen Chip mit sich, der die direkten Kontakte zu anderen Mitarbeitern der Firma automatisch erkennt und speichert.

Daraus lässt sich ein ungerichteter Kontaktgraph $G = (V, E)$ generieren. Dabei ist V die Menge der Mitarbeiter und E die Menge der Paare von Mitarbeitern, die direkten Kontakt zueinander hatten.

Aufgrund eines Programmierfehlers speichern die Chips leider nicht ab, mit *welchen* Mitarbeitern es Kontakt gab, sondern lediglich die *Anzahl* der Mitarbeiter, mit denen es Kontakt gab.

Aus den Daten ist folgendes bekannt:

Mitarbeiter	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Anzahl Kontakte	1	2	2	2	3	4	4	5	5	7	10	11

Mitarbeiter e ist infiziert.

Welche Mitarbeiter hatten direkten Kontakt mit der positiv getesteten Person und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.