Diskrete Modellierung

Wintersemester 2020/2021

Prof. Dr. Martin Hoefer
Marco Schmalhofer, Daniel Schmand

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 8

Ausgabe: 14.01.2021
Abgabe: 21.01.2021, **8:00**

Zur Erinnerung: Sei $\textsc{Web} = (V, E)$ ein Webgraph mit $V = \{1, \dots, n\}$.
Ein Tupel $\mathrm{PR} = (\mathrm{PR}_1, \dots, \mathrm{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ hat die Page-Rank-Eigenschaft bezüglich d, wenn für alle $j \in V$ gilt:

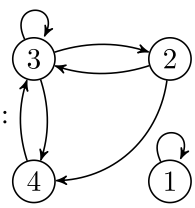
$$\mathrm{PR}_j = \frac{1-d}{n} \; + \; d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_{\textsc{Web}}(j)} \frac{\mathrm{PR}_i}{a_i}.$$

Aufgabe 8.1 *Page-Rank I* (8 + 8 + 9 = 25 Punkte)

a) Betrachten Sie den rechts dargestellten Webgraphen $\textsc{Web}$. Geben Sie die Übergangsmatrix $P_d(\textsc{Web})$ für den Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$ an.

b) Zeigen Sie, dass das Tupel $\mathrm{PR} := \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{11}, \frac{15}{44}, \frac{5}{22}\right)$ die Page-Rank-Eigenschaft (bzgl. $d = \frac{1}{2}$) besitzt.

$\textsc{Web}$:



c) Wie ändern sich die Page-Ranks PR_i der Seiten $i = 1, 2, 3, 4$, wenn in $\textsc{Web}$ der Link von Webseite 2 auf Webseite 4 entfernt wird? Welche steigen, welche sinken, welche bleiben gleich?

Eine kurze, begründete Antwort genügt. Eine Rechnung ist nicht erforderlich.

Aufgabe 8.2 *Page-Rank II* (6 + 6 + 13 = 25 Punkte)

Gegeben sei die Übergangsmatrix $P := P_d(\textsc{Web}')$ einer Webkette $\mathcal{W} = (G, P)$ mit dem Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$ auf dem Webgraphen $\textsc{Web}'$, wobei

$$P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie den zugrundeliegenden **Webgraphen** $\textsc{Web}'$ an. (Ohne Begründung)

b) Ein Zufallssurfer starte in Knoten 1, d.h. für die Anfangsverteilung gelte $\pi^{(0)} = (1, 0, 0)$. Berechnen Sie, wo sich der Surfer mit welcher Wahrscheinlichkeit nach einem Schritt und nach zwei Schritten aufhält, d. h. berechnen Sie $\pi^{(1)}$ und $\pi^{(2)}$.

c) Bestimmen Sie ein Tupel PR mit der Page-Rank-Eigenschaft bzgl. $d = \frac{1}{2}$ für $\textsc{Web}'$.

Aufgabe 8.3 *E-Scooter Vermietung* (8 + 12 + 5 = 25 Punkte)

Ein Vermieter von E-Scootern besitzt die drei Standorte Bockenheim (B), Hauptbahnhof (H) und Riedberg (R). An diesen drei Verleih-Stationen können E-Scooter ausgeliehen und wieder abgegeben werden. Die Auswertung der Kundendaten ergab die folgende Statistik:

I) 75% aller in Bockenheim ausgeliehenen E-Scooter werden wieder in Bockenheim abgegeben, aber nur ein Sechstel der in Bockenheim ausgeliehenen E-Scooter werden am Riedberg abgegeben.

II) Leiht ein Kunde einen E-Scooter am Hauptbahnhof aus, so gibt er ihn in 19 von 36 Fällen dort wieder ab, aber nur in einem von 12 Fällen in Bockenheim.

III) Zwei von drei Kunden, die am Riedberg einen E-Scooter ausleihen, geben ihn am Riedberg oder am Hauptbahnhof wieder ab, und zwar fünfmal so häufig am Riedberg wie am Hauptbahnhof.

Da alle E-Scooter zwischen 22 und 6 Uhr auf einem Parkplatz an den drei Standorten stehen müssen, überlegt der Vermieter, wie groß diese Parkplätze auf lange Sicht sein sollten.

a) Modellieren Sie die Statistik als Markov-Kette $\mathcal{M} = (G, P)$, indem Sie eine Irrfahrt eines E-Scooters zwischen den Zuständen $B := 1$, $H := 2$ und $R := 3$ annehmen.
Geben Sie den Graphen G in grafischer Darstellung an und beschriften Sie jede Kante mit der entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeit. Geben Sie auch die Übergangsmatrix P an.

b) Angenommen, zu Beginn der Irrfahrt befindet sich ein E-Scooter in Bockenheim, d. h. die Anfangsverteilung sei $\pi^{(0)} = \left(\pi_B^{(0)}, \pi_H^{(0)}, \pi_R^{(0)}\right) = (1, 0, 0)$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt

$$\pi^{(t)} = \left(\tfrac{1}{2}(1 + 2^{-t})\ ,\ \tfrac{1}{6}(1 - 2^{-t})\ ,\ \tfrac{1}{3}(1 - 2^{-t})\right).$$

Anmerkung: Es genügt, wenn Sie den Induktionsschritt nur für eine der drei Komponenten ausführen.

c) Angenommen, der Vermieter verfügt über 18 E-Scooter und ist schon seit vielen, vielen Jahren im Geschäft. Wie viele E-Scooter parken erwartungsgemäß am Abend auf jedem der drei Parkplätze Bockenheim, Hauptbahnhof und Riedberg?

Aufgabe 8.4 *Gambler's Ruin* $(7 + (9 + 9) + (7 + 9 + 4)^* = 25$ Punkte $+ 20^*$ Extrapunkte)

In dieser Aufgabe erweitern wir die Gambler's-Ruin-Kette aus der Vorlesung um „Unentschieden". Jedes Spiel hat nun drei mögliche Ausgänge: der Spieler gewinnt einen Euro, der Spieler verliert einen Euro oder sein Kapital bleibt gleich. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist $p \in (0, 1)$ und die Wahrscheinlichkeit zu verlieren ist $q \in (0, 1)$. Weiterhin ist K das Startkapital des Spielers, N das Kapital des Casinos und $M := K + N$ das Gesamtkapital.

a) Erweitern Sie die Gambler's-Ruin-Kette, so dass sie das neue Spiel modelliert. Geben Sie den Graphen der neuen Markov-Kette für $M = 4$ und $p = q = \frac{1}{4}$ in grafischer Darstellung an und beschriften Sie jede Kante mit der entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeit.

b) Betrachten Sie den Fall $p = q$, d.h. die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist genau so groß wie die Wahrscheinlichkeit zu verlieren.

   Sei d_K die erwartete Spieldauer bei Startkapital K, d.h. die erwartete Anzahl an Spielen bis der Zustand 0 oder M erreicht ist.

   i) Stellen Sie eine Rekursionsgleichung für d_K in Abhängigkeit von d_{K-1}, d_K und d_{K+1} auf. Welche Werte haben d_0 bzw. d_M?

   ii) Zeigen Sie: Es gilt $d_K = \frac{K}{2p}(M - K)$.

   Hinweis: Verifizieren Sie, dass die angegebene Lösung Ihre Rekursionsgleichung aus i) erfüllt. Überprüfen Sie auch die Randwerte.

   Warum steigt d_K mit sinkendem p an?

c) Sei s_K die Wahrscheinlichkeit, die Bank zu sprengen, d.h. von Zustand K aus den Zustand M zu erreichen.

   i) Stellen Sie eine Rekursionsgleichung für s_K in Abhängigkeit von s_{K-1}, s_K und s_{K+1} auf. Welche Werte haben s_0 bzw. s_M?

   ii) Zeigen Sie: $s_K = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^K}{1-\frac{q}{p}} \cdot s_1 & \text{falls } p \neq q, \\ K \cdot s_1 & \text{falls } p = q\,. \end{cases}$

   Hinweis: Stellen Sie die Gleichung aus i) nach $s_{K+1} - s_K$ um und expandieren Sie, sodass Sie $s_{K+1} - s_K$ in Abhängigkeit von $s_1 - s_0$ erhalten. Verwenden Sie anschließend eine Teleskopsumme, um s_K durch eine geometrische Reihe ausdrücken zu können.

   iii) Zeigen Sie: $s_K = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^K}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M} & \text{falls } p \neq q, \\ \frac{K}{M} & \text{falls } p = q\,. \end{cases}$

   Hinweis: Nutzen Sie Randwerte, um s_1 zu bestimmen.