Diskrete Modellierung

Wintersemester 2020/2021

Prof. Dr. Martin Hoefer
Marco Schmalhofer, Daniel Schmand

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 9

Ausgabe: 21.01.2021
Abgabe: 28.01.2021, **8:00**

Aufgabe 9.1 *Irreduzibilität und Aperiodizität* (12 + 18 = 30 Punkte)

a) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1, G_2 und G_3. Bestimmen Sie (mit kurzer Begründung), welche der Graphen irreduzibel bzw. aperiodisch sind, und welche nicht.

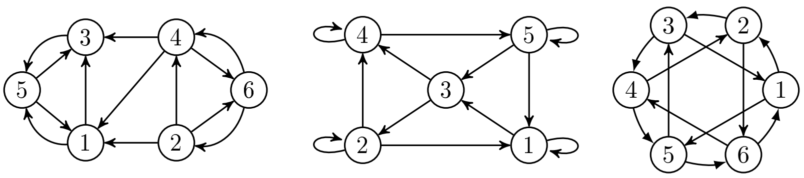


Abbildung 1: Links: G_1, Mitte: G_2, Rechts: G_3.

b) Wir führen drei neue Schachfiguren *Halbkönig*, *Diagonalspringer* und *Fastläufer* ein. Die möglichen Züge der drei Figuren finden Sie in Abbildung 2.

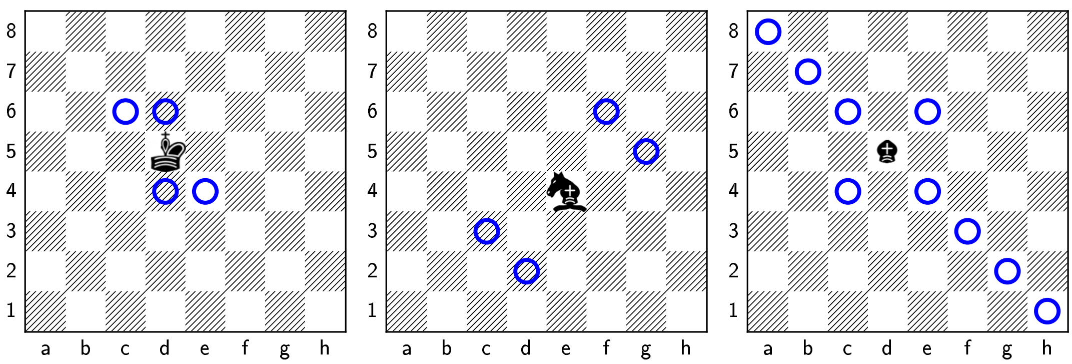


Abbildung 2: Die möglichen Züge jeder Figur sind mit blauen Kreisen markiert.
Links: Halbkönig, Mitte: Diagonalspringer, Rechts: Fastläufer.

Sei $F \in \{\text{Halbkönig}, \text{Diagonalspringer}, \text{Fastläufer}\}$ eine Figur. Wir modellieren die Bewegungen von F durch eine Markov-Kette (G_F, P_F) mit den Zuständen $V := \{\text{a}, \dots, \text{h}\} \times \{1, \dots, 8\}$. In jedem Zustand $v \in V$ entsprechen die Zustandsübergänge (v, w) den möglichen Zügen von F in Position v, wobei jeder Übergang die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt. Es ist nicht zulässig, dass die Figur auf ihrem Feld stehen bleibt, sie *muss* sich bewegen.

Geben Sie jeweils an, ob die Markov-Kette (G_F, P_F) irreduzibel bzw. aperiodisch ist, wenn es sich bei der Figur F um

i) einen Halbkönig, ii) einen Diagonalspringer, iii) einen Fastläufer

handelt. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Antwort. Sie brauchen die Markov-Kette bzw. ihren Graphen und ihre Übergangsmatrix nicht explizit zu bestimmen!

Aufgabe 9.2 *Mut oder Vorsicht?* $(8+8+6+5=27$ Punkte)

Alice kam mit 8 Euro ins Casino und hat alles bis auf 3 Euro verspielt. Sie wird von (falschem?) Ehrgeiz gepackt und nimmt sich vor, so lange weiterzuspielen, bis sie ihre 8 Euro wieder hat oder pleite ist.

Alice kann Geld auf „schwarz" oder „rot" setzen und dabei den gesetzten Betrag verdoppeln oder verlieren. Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit für ein Spiel sei $p \in (0,1)$.

Alice entscheidet sich für eine der folgenden Strategien:

- Bei der *vorsichtigen* Strategie setzt sie stets einen Euro und verlässt den Tisch, sobald sie 8 Euro hat oder pleite ist.
- Bei der *aggressiven* Strategie setzt sie stets soviel wie möglich, *aber nicht mehr als nötig*, um den Tisch mit 8 Euro zu verlassen. Sie verlässt den Tisch, sobald sie 8 Euro hat oder pleite ist.

a) Modellieren Sie die beiden Strategien jeweils mit einer Markov-Kette.

b) Bestimmen Sie für beide Strategien die Wahrscheinlichkeit w_{Erfolg}, dass Alice ihre 8 Euro wieder bekommt.

Hinweis: Für die vorsichtige Strategie können Sie die Ergebnisse zum Gambler's-Ruin-Problem aus der Vorlesung (Beispiel 6.11 im Skript) verwenden. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $p = 1/2$ und $p \neq 1/2$.

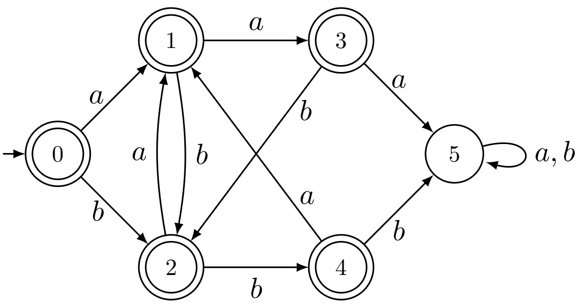
c) Berechnen Sie für beide Strategien jeweils die Wahrscheinlichkeit w_{Erfolg} für die drei Fälle

i) $p = \frac{1}{3}$, ii) $p = \frac{1}{2}$, iii) $p = \frac{2}{3}$.

d) Skizzieren[1] Sie den Funktionsgraphen der Wahrscheinlichkeiten w_{Erfolg} für beide Strategien in Abhängigkeit von p und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 9.3 *DFAs lesen und DFAs konstruieren* $(7+(8+8)=23$ Punkte)

a) Betrachten Sie den folgenden DFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:



Beschreiben Sie die Sprache $L(A)$ mathematisch oder umgangssprachlich.

b) Geben Sie für die beiden folgenden Sprachen L_1 und L_2 jeweils einen DFA mit möglichst wenigen Zuständen an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

i) $L_1 := \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ beginnt entweder mit } 0 \text{ oder endet mit } 1\}$

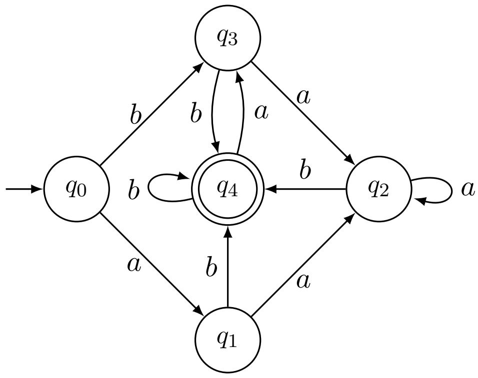
ii) $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ enthält gerade viele } a \text{ oder ungerade viele } b\}$

In dieser Aufgabe sind keine Begründungen notwendig.

[1] Sie können den Graphen auch plotten, z. B. mit diesem Tool: `https://rechneronline.de/funktionsgraphen/`

Aufgabe 9.4 *Verschmelzungsrelation* ((4+4) + (6+6) = 20 Punkte)

a) Betrachten Sie den folgenden DFA A über $\Sigma = \{a, b\}$.



i) Weisen Sie die folgenden Inäquivalenzen bzgl. der Verschmelzungsrelation $\equiv_A$ nach, indem Sie geeignete Zeugen angeben.

- $q_0 \not\equiv_A q_4$
- $q_0 \not\equiv_A q_2$

ii) Ohne Begründung: Geben Sie alle Äquivalenzklassen der Verschmelzungsrelation $\equiv_A$ an.

b) Sei $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA und seien $p, q \in Q$ zwei beliebige Zustände.

Zeigen oder widerlegen Sie:

i) Wenn $p \not\equiv_A q$, dann $L(A) \neq \emptyset$.
ii) Wenn $p \not\equiv_A q$, dann gibt es ein $a \in \Sigma$, so dass $\delta(p, a) \not\equiv_A \delta(q, a)$.

Aufgabe 9.5 *Bonusaufgabe* ($9 + 7 + 9 = 25^*$ Extrapunkte)

a) Jede *nicht*-aperiodische Markov-Kette lässt sich durch Hinzufügen von Eigenschleifen in eine aperiodische Kette überführen, welche dieselben stationären Verteilungen besitzt.

Sei $\mathcal{M} = (G, P)$ eine beliebige Markov-Kette mit Graphen $G = (V, E)$ und sei I die Einheitsmatrix. Betrachte die Markov-Kette $\mathcal{M}' = (G', P')$ mit dem Graphen $G' = (V, E')$ wobei $E' = E \cup \{(i, i) : i \in V\}$, und der Übergangsmatrix $P' = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I$.

Zeigen Sie:

$\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ besitzen dieselben stationären Verteilungen, d. h. für jede Verteilung π gilt:

$$\pi \text{ ist eine stationäre Verteilung für } \mathcal{M} \iff \pi \text{ ist eine stationäre Verteilung für } \mathcal{M}'$$

b) Zeigen oder Widerlegen Sie: Es gibt eine Markov-Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ mit irreduziblem G und mindestens zwei stationären Verteilungen.

Hinweis: Sie dürfen Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden.

c) Sei $\mathcal{M} = (G, P)$ eine beliebige Markov-Kette.
Zeigen Sie: Wenn G irreduzibel ist, dann haben alle Zustände in $\mathcal{M}$ die gleiche Periode.

Hinweis: Beachten Sie Definition 6.26 im Skript.