Prof. Dr. Martin Hoefer
Marco Schmalhofer, Daniel Schmand

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 11

Ausgabe: 04.02.2021
Abgabe: 11.02.2021, **8:00**

Aufgabe 11.1 *Grenzen der Regularität* (11 + 11 = 22 Punkte)

Zeigen Sie mit dem Satz von Myhill-Nerode II, dass die Sprachen L_1 und L_2 nicht regulär sind.

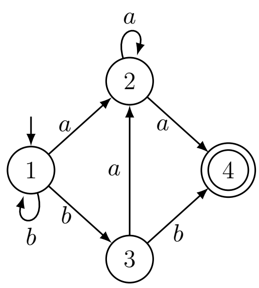
a) $L_1 := \{a^n b^{2n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$

b) $L_2 := \{0^k 1^\ell \,:\, k, \ell \in \mathbb{N},\, k \leq \ell \leq k^2\}$

Hinweis: Finden Sie jeweils eine unendliche Menge von Worten $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots\}$, die paarweise inäquivalent bzgl. der Nerode-Relation sind, und weisen Sie die Inäquivalenzen $u_i \not\equiv_L u_j$ (für $L \in \{L_1, L_2\}$) durch Angabe geeigneter Zeugen nach.

Aufgabe 11.2 *NFAs und Potenzmengenkonstruktion* ((3+8+6) + 6 = 23 Punkte)

a) Sei N der rechts abgebildete NFA über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$.



i) Welche der folgenden Wörter liegen in $L(N)$, welche nicht?

$w_1 := aaa \qquad w_2 := bab \qquad w_3 := bbaa$

ii) Konstruieren Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen DFA D, der dieselbe Sprache wie N akzeptiert. Berücksichtigen Sie in D nur Zustände, die vom Startzustand von D aus erreichbar sind.

iii) Geben Sie einen regulären Ausdruck für $L(N)$ an.

b) Konstruieren Sie einen NFA für die Sprache des regulären Ausdrucks $ab^*a|a^*|(ab)^*$.

Aufgabe 11.3 *DFAs vs. NFAs* ($10 + 10^* = 10$ Punkte $+ 10^*$ Extrapunkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie die Sprache $L_n := \{w_1 w_2 : w_1, w_2 \in \Sigma^n, w_1 \neq w_2\}$.

a) Zeigen Sie: Jeder DFA für die Sprache L_n benötigt mindestens 2^n Zustände.

Hinweis: Zeigen Sie $\text{Index}(L_n) \geq 2^n$.

b) Konstruieren Sie einen NFA mit möglichst wenigen Zuständen für L_n. Begründen Sie auch die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Aufgabe 11.4 *Reguläre Ausdrücke* $((4+6)+15 = 25$ Punkte$)$

a) Gegeben seien die regulären Ausdrücke $R_1 := (b|ab^*a)^*|(a|ba^*b)^*$ und $R_2 := ((aaa)^* \mid (bb)^*)^*$.

   i) Welche der folgenden Wörter liegen in $L(R_1)$ bzw. $L(R_2)$, welche nicht?

   $w_1 := aabb$ $\qquad\qquad$ $w_2 := bbaaabb$

   ii) Beschreiben Sie die Sprachen $L(R_1)$ und $L(R_2)$ umgangssprachlich.

b) Geben Sie für die folgenden Sprachen je einen (möglichst kurzen) regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

   i) $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ enthält genau ein } a\}$

   ii) $L_2 := \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ enthält weder das Teilwort 01 noch das Teilwort 10}\}$

   iii) $L_3 := \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ enthält nicht das Teilwort } bab\}$

   Sie müssen Ihre Antworten nicht begründen.

Aufgabe 11.5 *Kontextfreie Grammatiken* $(7+7+6 = 20$ Punkte$)$

a) Sei $G := (\Sigma, V, S, P)$ die kontextfreie Grammatik mit $\Sigma := \{a,b,c\}$, $V := \{S,T\}$ und

$$P := \{\, S \to aScc \mid T \\ T \to bT \mid \varepsilon \,\}.$$

   Beschreiben Sie die Sprache $L(G)$ umgangssprachlich oder mathematisch.

b) Gegeben sei die Sprache

$$L_1 := \{a^m b^n \,:\, m,n \in \mathbb{N},\ n \leq 2m\}.$$

   Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_1 := (\Sigma, V, S, P)$ mit $L(G_1) = L_1$. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

c) Gegeben sei die Sprache

$$L_2 := \{w \in \{0,1\}^* : \text{für jedes Präfix } v \text{ von } w \text{ gilt: es gibt nicht mehr Nullen als Einsen in } v\}.$$

   Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_2 := (\Sigma, V, S, P)$ mit $L(G_2) = L_2$. Begründen Sie kurz die Korrektheit Ihrer Grammatik.

   Hinweis: Die Präfixe eines Wortes $w_1 w_2 \dots w_n \in \{0,1\}^n$ sind alle Worte $w_1 \dots w_i$ mit $0 \leq i \leq n$.