Diskrete Modellierung

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. Martin Hoefer
Tim Koglin, Conrad Schecker

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität

Übungsblatt 2

Ausgabe: 30.10.2023
Abgabe: 06.11.2023, 23:55 Uhr

Aufgabe 2.1. *Mengenoperationen* $(7 + (3 + 3) = 13$ Punkte$)$

a) Gegeben sei das Universum $U \coloneqq \mathbb{Z}$ sowie die Mengen $A \coloneqq \{-8, -5, -3, -2, -1\}$, $B \coloneqq \{0, 6, 9\}$, $C \coloneqq \{z^3 : z \in \mathbb{Z}\}$. Daraus abgeleitet ist die Menge $D \coloneqq \{(a, b) \in A \times B : |a + b| \leq 1\}$.

Geben Sie jede der folgenden Mengen in extensionaler Form an. Die Angabe nachvollziehbarer Zwischenschritte ist als Begründung ausreichend.

i) D
ii) $\left(\overline{C}\right)^2 \cap D$
iii) $(U \times A) \cap (U \times B)$
iv) $(A \setminus \overline{C}) \times (B \cap \mathbb{N}_{>0})$
v) $\{X \in \mathcal{P}(A \cap C) : |X| \geq 1\}$
vi) $\left\{(a_1, a_2) \in A^2 : a_1 + a_2 \in A\right\}$
vii) $\displaystyle\bigcap_{b \in B \setminus \{0\}} \left(\bigcup_{a \in A} \{a - b\} \right)$

b) Seien A und B beliebige nichtleere Mengen. Zeigen oder widerlegen Sie:

i) Wenn $|\mathcal{P}(A \cup B)| = 2$, dann ist $A \cap B \neq \emptyset$.
ii) $\mathcal{P}(A \cap B) = (\mathcal{P}(A \cup B) \setminus \mathcal{P}(A \oplus B)) \cup \{\emptyset\}$

Aufgabe 2.2. *Eigenschaften von Funktionen* $((4 + 4 + 4) + 3 = 15$ Punkte$)$

a) Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

i) $f_1 \colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}$ mit $f_1(n) \coloneqq n^2 - n + 1$
ii) $f_2 \colon \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0} \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\})^2$ mit $f_2(x, y) \coloneqq \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$
iii) $f_3 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $f_3(z) \coloneqq \begin{cases} 2z + 1, & \text{falls } z \geq 0 \\ -2z, & \text{falls } z < 0 \end{cases}$

Beantworten Sie für jede der obigen Funktionen f_i **alle** folgenden Fragen:

- Ist f_i injektiv? Falls dies nicht der Fall ist, geben Sie zwei Elemente $x, y \in \mathrm{Def}(f_i)$ an, sodass $x \neq y$ und $f_i(x) = f_i(y)$ gilt.
- Ist f_i surjektiv? Falls dies nicht der Fall ist, geben Sie ein Element x aus dem Bildbereich an, sodass $x \notin \mathrm{Bild}(f_i)$ gilt.

(Weitere) Begründungen sind jeweils nicht notwendig.

b) Sei $g \colon A \to B$ eine Funktion und sei $A' \in \mathcal{P}(A)$ beliebig. Was können Sie über das Bild von A' unter g folgern, wenn

i) g injektiv ist?
ii) g surjektiv ist?
iii) g bijektiv ist?

Bitte wenden!

Aufgabe 2.3. *Geisterjagd* $(1 + 1 + (1 + 1 + 2) + (2 + 2 + 2) = 12$ Punkte)

In einer Frankfurter Studierenden-WG verschwinden trotz des vorbildlichen Einsatzes von Klebezetteln Lebensmittel einzelner Mitglieder aus dem gemeinsamen Kühlschrank. Da alle Mitglieder ihre Unschuld beteuern, soll die WG-Küche auf die Anwesenheit von (hungrigen) Geistern hin überprüft werden.

Im Folgenden sollen einige Aspekte dieser Geisterjagd mit Mengen und Funktionen modelliert werden. Sei G die Menge aller möglichen *Geisterarten* (Pfannkuchen-Phantom, Yoghurt-Yokai, Bananen-Banshee etc.), die die WG-Küche heimsuchen könnten. Jede Geisterart $g \in G$ hinterlässt immer dieselbe spezifische Menge S_g an Spuren, wobei S_g niemals leer ist.

a) Definieren Sie die Menge GK aller möglichen Konstellationen an Geisterarten, die in der Küche herumspuken könnten.

b) Definieren Sie Menge S aller Spuren, nach denen die WG-Mitglieder suchen könnten.

c) Die WG muss sich eine passende Ausrüstung zusammenstellen. Sei A die Menge aller Ausrüstungsgegenstände. Jeder Ausrüstungsgegenstand kann für bestimmte Spuren feststellen, ob diese vorhanden sind oder nicht. Die Relation $R \subseteq A \times S$ ordnet jedem Ausrüstungsgegenstand die Spuren zu, die man mit ihm überprüfen kann, wobei jeder Gegenstand mindestens eine Spur detektieren kann.

   i) Welches Element vom R besagt, dass man mittels einer UV-Lampe Fingerabdrücke detektieren kann?

   ii) Definieren Sie die Menge A_{Finger} aller Ausrüstungsgegenstände, mit denen man Fingerabdrücke detektieren kann.

   iii) Definieren Sie die Menge A_1 aller Ausrüstungsgegenstände, die genau eine Spur detektieren können.

d) Um die Lieferzeit zu überbrücken, machen sich die Mitglieder bereits Gedanken über die Auswertung. Sie wollen eine Funktion $f_1 : X \to Y$ bestimmen, die für eine beliebige Spur und der Information, ob diese gefunden wurde („1“) oder nicht („0“), die Geisterarten ausgibt, die noch nicht ausgeschlossen werden können.

   i) Definieren Sie die Mengen X und Y.

   ii) Geben Sie eine Funktionsvorschrift für f_1 an.

   iii) Die WG möchte die Menge $S_{\text{Test}} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ von Spuren testen. Sie nehmen an, dass sie alle diese Spuren bis auf s_3 finden werden.

   Definieren Sie die Menge $G_{\text{übrig}}$ an Geisterarten, die nach der Untersuchung der Spuren in S_{Test} noch nicht ausgeschlossen werden können, wenn wie erwartet alle Spuren bis auf s_3 gefunden werden.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4. *Hilberts wackeliges Warenlager* (4 + 6 = 10 Punkte)

Der Lageranbieter StoreMod ist auf die Lagerung empfindlicher Vasen spezialisiert. Jedes Regal, in dem Vasen gelagert werden können, hat unendlich viele Abstellplätze, die fortlaufend mit allen Zahlen aus $\mathbb{N}$ nummeriert sind. StoreMod besitzt unendlich viele dieser Regale, die ebenfalls fortlaufend mit allen Zahlen aus $\mathbb{N}$ nummeriert sind.

a) Aufgrund defekter Schwingungsdämpfer muss StoreMod die Vasen aus den Regalen 1 bis 7 in ein neues, anfänglich leeres Regal zusammenlegen.

   Geben Sie eine Funktion f an, die einer Vase in Regal i und Abstellplatz j einen neuen Abstellplatz $f(i, j)$ im neuen Regal zuweist. Dabei dürfen natürlich keine zwei Vasen demselben Abstellplatz zugewiesen werden.

b) Um den Wartungsaufwand für die Schwingungsdämpfer künftig zu minimieren, möchte StoreMod die Vasen aus allen Regalen in ein neues, anfänglich leeres Regal zusammenlegen.

   Geben Sie eine Funktion g an, die einer Vase im Regal i und Abstellplatz j einen neuen Abstellplatz $g(i, j)$ im neuen Regal zuweist. Auch hier darf kein Platz doppelt vergeben werden.

Begründen Sie in beiden Teilaufgaben, dass Ihre Funktion die vorgegebenen Eigenschaften erfüllt. Ein formaler Beweis ist nicht notwendig.

Hinweis: Die Abstellplätze im neuen Regal müssen nicht lückenlos vergeben werden.

Kontakt: Tim Koglin, Conrad Schecker (dismod23@cs.uni-frankfurt.de).